2024. 4.28(日) ~ 4.30(二) Ru

$\boxed{1}$ 設 $f(x)=x^{2024}=(x^2+1)(x-1)Q_1(x)+\boxed{B(x^2+1)+Cx+D}$

法: $f(i)=Ci+D=1 \Rightarrow C=0,\ D=1$

$f(1)=2B+1=1 \Rightarrow B=0$

$\Rightarrow \boxed{}=1$

設 $f(x)=x^{2024}$

$=(x^2+1)(x-1)^2Q(x)+A(x^2+1)(x-1)+\boxed{1}$

$f'(x)=2024x^{2023}=(x-1)(\sim)+A(2x(x-1)+(x^2+1))$

$f'(1)=2A=2024$

$\Rightarrow A=1012 \Rightarrow 1012(x^3-x^2+x-1)+1$

$= \cdots\cdots$ #

臺中市立文華高級中等學校 113 學年度第 1 次教師甄選

數學科專業知能試題本

測驗說明：

一、本測驗分成二大題：填充題(80 分)及計算題(20 分)。

二、填充題作答說明：請將正確答案填入正確的題格中，分式須化至最簡，根式須有理化，否則不予計分，全對才給分，不需計算過程。

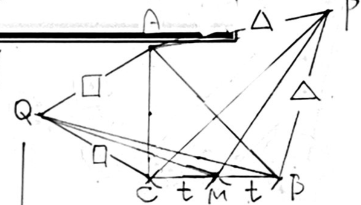
三、計算題作答說明：請自行標清楚題號再作答，須詳列計算過程或說明理由。

四、另附一張 A3 計算紙，可供計算或打草稿，請勿用答案卷正反面打草稿。計算紙上方請書寫准考證號碼，並於考試完畢隨試題收回。

階梯假設法

$\overline{BQ}^2=\square^2+\triangle^2-2\square\triangle\cos(A+60^\circ)=\overline{PC}^2 \overset{令}{=} S^2$

$\boxed{3}$



$S^2+\triangle^2=2(18^2+t^2)$

$-)\ S^2+\square^2=2(14^2+t^2)$

$\Rightarrow 4t^2=2\cdot 32\cdot 4$

$\Rightarrow \overline{BC}=2t=16$

一、填充題：(共 80 分)

Ⅰ.填充一(每格 4 分，共 32 分，每格全對才給分。)

1. x^{2024} 除以 $(x^2+1)(x-1)^2$ 所得的餘式為 $1012x^3-1012x^2+1012x-1011$

2. 設有一數列 $<a_n>$ 滿足 $\begin{cases} a_1=1\ ,\ a_2=2 \\ a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}(n\geq 3, n\in N) \end{cases}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=$ $\frac{5}{3}$ 。

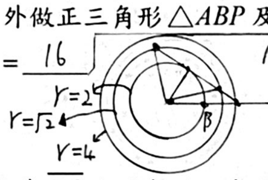
$\boxed{2}$ $2x^2-x-1=0$

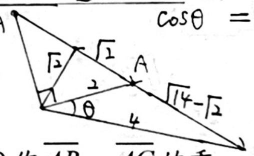
$a_n=A+B(-\frac{1}{2})^n$ $\begin{cases} A-\frac{1}{2}B=1 \\ A+\frac{1}{4}B=2 \end{cases} \Rightarrow B=\frac{4}{3},\ A=\frac{5}{3}$ $\Rightarrow a_n=\frac{5}{3}+\frac{4}{3}(-\frac{1}{2})^n \longrightarrow \frac{5}{3}$

$(1-t)\overrightarrow{OA}+t(2\overrightarrow{OB})$ 和$=1$ 分点公式

$\boxed{4}$ 法2: yymath

3. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90^0$，以 $\overline{AB}$，$\overline{AC}$ 為邊向外做正三角形 $\triangle ABP$ 及 $\triangle ACQ$。設 M 為 $\overline{BC}$ 中點，若 $\overline{MP}=18$，$\overline{MQ}=14$，則線段 $\overline{BC}=$ 16



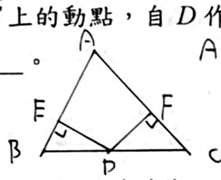


$\cos\theta=\frac{4+4\sqrt{7}}{2\cdot 4\cdot 2}=\frac{1+\sqrt{7}}{4}$

4. 已知 ΔABC 中，$\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=7$、$\overline{AC}=6$，D 為 $\overline{BC}$ 上的動點，自 D 作 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 的垂線，垂足分別為 E、F，則 $\overline{EF}$ 的最小值為 $\frac{144}{35}$ 。

AEDF 共圓

$\boxed{4}$



$\triangle ABC=\sqrt{9\cdot 4\cdot 2\cdot 3}=6\sqrt{6}=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot 6\cdot\sin A=\frac{1}{2}\cdot 7\cdot h$

$\cos(90^\circ+\theta)=-\sin\theta=\frac{1-\sqrt{7}}{4}$

5. 以定點 O 為圓心，半徑為 2 的圓上有兩點 A、B，已知對於任意實數 t，$\left|(1-t)\overrightarrow{OA}+2t\overrightarrow{OB}\right|\geq\sqrt{2}$ 恆成立，則 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ 的範圍為 $[1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}]$ 。

$\frac{\overline{EF}}{\sin A}=\overline{AD}=2R$

$max=4C=1+\sqrt{7}$

$min=4(-S)=1-\sqrt{7}$

法 $\boxed{5}$ 設 $A(2,0)$ $B(2\cos\varphi, 2\sin\varphi)$

$4((1-t)^2+4t^2+4t(1-t)\cos\varphi)\geq 2 \Rightarrow 2(5-4C)t^2+2(4C-2)t+1\geq 0$ (恆)

$\Rightarrow D\leq 0$

$\Rightarrow 16(4C^2-4C+1)-8(5-4C)\leq 0$

$\Rightarrow 8C^2-4C-3\leq 0 \longrightarrow \frac{4\pm 4\sqrt{7}}{16}$

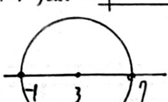
$\Rightarrow 4\cos\varphi\in[1-\sqrt{7}, 1+\sqrt{7}]$

當 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$，$min=h\sin A$

$=\frac{6\sqrt{6}\cdot 2}{7}\cdot\frac{6\sqrt{6}\cdot 2}{5\cdot 6}=\frac{144}{35}$

6. 定積分 $\int_{-1}^{7}(-2+\sqrt{-x^2+6x+7})dx=$ $\boxed{8\pi-16}$

$\boxed{6}$ $-2x\Big|_{-1}^{7}+\int_{-1}^{7}\sqrt{16-(x-3)^2}\,dx$ ($=y$)



$=-2\cdot 8+\frac{\pi\cdot 16}{2}=8\pi-16$

7. 為慶祝文華高中校慶，高二專題「手談算學」班的同學在圍棋棋盤上用 17 顆黑色棋子排出「文」字，今把這 17 顆棋子的位置坐標化分別為 $(-3,0)$、$(-2,0)$、$(2,0)$、$(3,0)$、$(-1,1)$、$(1,1)$、$(0,2)$、$(-1,3)$、$(1,3)$、$(-3,4)$、$(-2,4)$、$(-1,4)$、$(0,4)$、$(1,4)$、$(2,4)$、$(3,4)$、$(0,5)$，若這 17 個點可以決定 m 條不同的直線及 n 個不同的三角形，則 $m+n=$ 699

$\boxed{7}$

□點共線	組
7	1
5	2
4	1
3	5

$m=C^{17}_2-(C^7_2+C^5_2\cdot 2+C^4_2\cdot 1+C^3_2\cdot 5)+9=83$

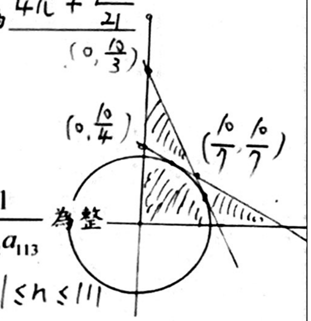
$n=C^{17}_3-(C^7_3+C^5_3\cdot 2+C^4_3+C^3_3\cdot 5)=616$

$\to 699$

8. 滿足 $(3|x|+4|y|-10)(4|x|+3|y|-10)(x^2+y^2-4)\le 0$ 之所有 (x,y) 所成圖形的面積為 $4\pi+\frac{100}{21}$

$\boxed{8}$ $(\frac{10}{12})\cdot\frac{10}{7}\cdot 4+4\pi$

$=\frac{100}{21}+4\pi$



II.填充二(每格 6 分，共 48 分，每格全對才給分)

9. 已知 $\langle a_n\rangle$ 為首項 $a_1=1$、公差 $d>0$ 的等差數列，若 $\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_2a_3}+\frac{1}{a_3a_4}+\dots\dots+\frac{1}{a_{112}a_{113}}$ 為整數，則公差 d 的最小的可能值為 $\frac{1}{12432}$。

$\boxed{9}$

$\frac{1}{a_ka_{k+1}}=\frac{1}{d}(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}})\Rightarrow\frac{1}{d}(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_{113}})=\frac{112}{112d+1}\overset{令}{=}n\in\mathbb{N}$

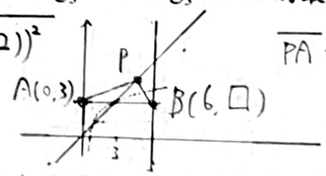
$\Rightarrow 112d+1=\frac{112}{n}>1\Rightarrow 1\le n\le 111$

$d\downarrow$ $n\uparrow$ 取 $n=111\Rightarrow d=\frac{1}{111\cdot 112}=\frac{1}{12432}$

10. 函數 $f(x)=\sqrt{2x^2-6x+9}+\sqrt{2x^2-16x+(\log_3 x)^2-2x\cdot\log_3 x+4\cdot\log_3 x+40}$ 的最小值為 6

$\sqrt{x^2+(x-3)^2}+\sqrt{(x-6)^2+(x-(\log_3 x+2))^2}$

$\boxed{10}$ 設 $P(x,x)$，$A(0,3)$，$B(6,\boxed{\ })$ $2+\log_3 x$



$\overline{PA}+\overline{PB}\ge\overline{AB}=\sqrt{36+(\square-3)^2}\ge 6$

當 $\boxed{2+\log_3 x}=3$，$x=3$ 時有 min

$\boxed{11}$

11. 設 $P=\sum_{k=1}^{1000}k\cdot C^{1000}_k$，其中 P 的最高位數字為 a，個位數字為 b，且 P 的整數位數為有 c 位數。若 z、w 為複數，滿足 $z=a+bi$，以及 $|w+7+5i|=1$，則 $|z-w|+c$ 的最小值為 316。

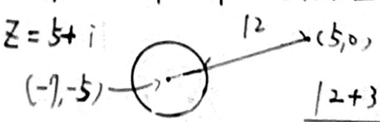
$kC^n_k=nC^{n-1}_{k-1}$

$P=1000\cdot 2^{999}\Rightarrow b=0$

$\log P\doteq 3+(1000-1)\cdot 0.301\Rightarrow a=5$

$=303+0.699\doteq\log 10^{303}+\log 5$ $c=304$

$z=5+i$



$12+304=316$

12. 將“1:2:3”適度添加括號後，可得兩種不同結果之比值，如：

$\boxed{12}$ the piano

① $1:(2:3)=1:\frac{2}{3}$，其比值為 $\frac{3}{2}$

② $(1:2):3=\frac{1}{2}:3$，其比值為 $\frac{1}{6}$

$1, 2$ $(\frac{1}{2})$ 固定

將“1:2:3:4”適度添加括號後，則有多種不同結果之比值，其中某兩種(舉例)如下：

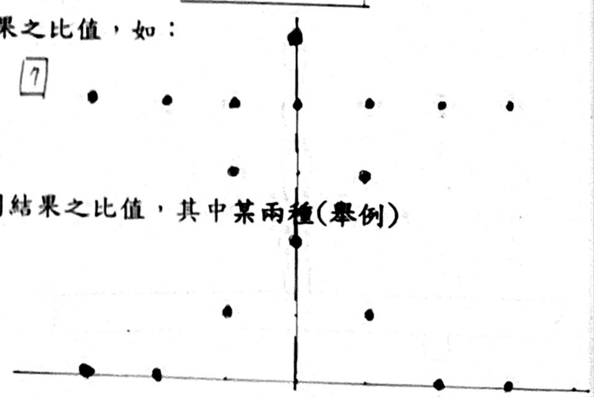
$3,4,5,6,7,8$ 放分子、分母

① $(1:2):(3:4)=\frac{1}{2}:\frac{3}{4}$，其比值為 $\frac{2}{3}$

② $1:((2:3):4)=1:(\frac{2}{3}:4)=1:\frac{1}{6}$，其比值為 6

2^6 種放法

$\boxed{7}$



按照上述方法，將“1:2:3:4:5:6:7:8”適度添加括號後，使其產生出一比值，則最多會有 60 種不同之比值。

$3\times 8=6\times 4$

(i) $\frac{3\times 8}{6\times 4}$ 5,7 有 $2\times 2=4$ 種

(ii) $\frac{6\times 4}{3\times 8}$ 5,7 有 $2\times 2=4$ 種

放法 比值重複 $\Rightarrow 2^6-4=60$