113 年臺北市立陽明高級中學 數學科 第 1 次教師甄選 筆試試題

說明：**1.** 本試題共 **19** 題填充題及 **1** 題計算題，每題 **5** 分，共 **100** 分。
2. 各題答案若非整數，請以有限小數、最簡分數或最簡根式作答。

1. $1\times(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100})+3\times(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100})+5\times(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{99}+\frac{1}{100})$
$+\cdots+197\times(\frac{1}{99}+\frac{1}{100})+199\times\frac{1}{100}=$__________

2. $y=f(x)=\sum_{k=1}^{2024}x(x-k)$，當實數 $x=$__________時，y 有最小值？

3. 有十個實數 a、b、c、d、e、f、8、11、12、17。若「此十個數的平均值」與「a、b、c、d、e、f 六個數的平均值」相等，且這兩組數的變異數也相等，則此變異數為__________。

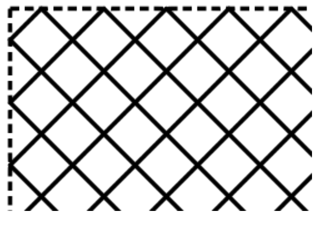
4. 設 $f(n)$ 表示正整數 n 之最大奇因數，例如 $f(3)=3$、$f(10)=5$，
則 $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(50)=$__________

5. 設實數 x 滿足：$\log_{2x-5}(x^3-7x^2+11x+4)=2$，則 $x=$__________

6. 若 x、y 是實數且滿足 $2x^2+5y^2=7x$，求 $18x+10y^2$ 的最大可能值為__________。

7. 假設袋中有 15 顆球，其中 4 顆紅球、1 顆白球、10 顆黃球。規定一次只能抽一球且不放回去，現在依甲先乙後的順序分別抽球一次，但當抽到的球是白球時，則須馬上再補抽一球。問甲有抽中紅球且乙也有抽中紅球的機率為__________

8. 將一些正方形用如右圖一樣方式填滿一個矩形盒子，則稱這些正方形可以被組裝成一個「鋸齒狀矩形」；右圖恰為一個 6×4 的鋸齒狀矩形，它是由 39 個大小相同的正方形所構成的。則一個 9×7 的鋸齒狀矩形內有__________個這樣的正方形。



9. 多項式方程式 $10x^3-39x^2+29x-6=0$ 的解為某長方體盒子的長、寬、高。若將這個長方體盒子每邊的邊長增加 2 單位長可得一個新的長方體盒子，則此新長方體盒子的體積為__________立方單位。

10. 以一個正方體的頂點為頂點的四面體共有__________個

11. 連接正八面體每一面中心點，會得到一正六面體。

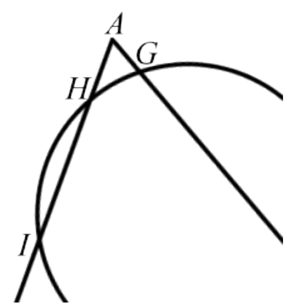
試求此正六面體體積：原正八面體體積之比值為__________

12. 將長度為ℓ之線段任意分為三段，則三段相接能構成一個三角形之機率為__________

13. 設$\triangle ABC$的三邊長$\overline{AB}=c$、$\overline{BC}=a$、$\overline{CA}=b$，且$|b-c|\cos\frac{A}{2}=5$、$(b+c)\sin\frac{A}{2}=10$，

則a之值為__________

14. 如右圖，圓與正三角形$\triangle ABC$的三邊交出6個點，如果$\overline{AG}=2$、$\overline{GF}=13$、$\overline{FC}=1$、$\overline{HI}=7$，試求$\overline{DE}=$__________



15. 令$A=\begin{bmatrix}-6 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 1\\ -7 & -1 & 2\end{bmatrix}$，求$A^{-1}=$__________

16. 考慮有以上特性的4×4方陣：

它的每一個元都是0或1，滿足四列的元之和分別為1、2、3、4(不須依照順序)，

且四行的元之和也分別為1、2、3、4(不須依照順序)。

例如：方陣$\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&1&1&0\\1&1&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$滿足以上的條件。

則符合上述特性的4×4方陣有__________個

17. 已知$\cos^{-1}x=\cos^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{7}$，求$x=$__________

18. 若$f(\frac{1+x}{1-x})=x$，則$f'(3)=$__________

19. 設$f(x)=\int_1^x t(t^2-4)dt$且$f(x)$在$x=a$處有極大值b，則序對$(a,b)=$__________

20. 計算題 xy平面上有兩點$A(-2,1)$、$B(-5,0)$，設P點在x軸上移動，

則$\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}}$之比值有最大值時的$P$點坐標為何？