# 臺北市立南港高工113學年度第1次教師甄選筆試命題試題紙

甄選科別：一般類科　　　　科目：數學科

**作答說明**

1. **請使用藍、黑原子筆，並於答案卷作答。**
2. **填充題答案若為分數或根式，請化至最簡。**
3. **計算、證明與論述題請標明題號及子題號，標示不清者不予計分。**

## 一、填充題(每題 7 分，共 56 分)

1. 若整數 $n$ 可使 $\dfrac{n^3+2024}{n+11}$ 亦為整數，則 $n$ 的最大值為__________。

2. 平面上，在一個正方形內部(含邊界)放入6個邊長為1的正三角形，使得這6個正三角形的內部區域彼此互不重疊，則此正方形的邊長最小值為__________。

3. 甲乙丙丁戊己庚辛壬癸等10人排成一列先後上台，若甲、乙都比丙、丁、戊先上台，且庚比辛先上台，則這10人共有__________種不同的上台順序。

4. 滿足 $\int_{k^2}^{k^4}(x-\sqrt{101})dx=0$ 的相異實數 $k$ 共有__________個。

5. 數列 $\{a_n\}$ 由9項非負實數構成，且對於 $i=1,2,3,...,8$，恆有 $a_i^{\ 2}+a_{i+1}^{\ 2}\le 3$。若 $\sum_{i=1}^{9}a_i$ 的最大值為 $M$、最小值為 $m$，則數對 $(M,m)$ 為__________。

6. 設二次函數 $y=x^2-6x+5$ 的圖形交 $x$ 軸於 $A$、$B$ 兩點，$P$ 是直線 $x+y=-4$ 上的動點。當 $\angle APB$ 有最大值時，$\Delta ABP$ 的外心坐標為__________。

7. 不透明袋中有黑球2顆、白球3顆、紅球4顆、藍球5顆，每球被抽到機率均等。現每次從袋中任抽一球，登記顏色後放回，混合均勻後再抽一次，如此反覆進行下去，直到抽

出第6次紅球為止。抽球過程中，若某次抽到紅球，且其前後的抽取結果均非紅球，則稱它為「獨立紅」。舉例來說，「白紅紅白藍藍紅紅黑白紅藍白紅」是一種可能的抽球過程，其中出現的第5、6次紅球都是獨立紅。求抽球過程中，「獨立紅」出現次數的期望值為__________。

8. 南港高工全校有男、女生各若干人，其中男生人數介於100到1000人之間。已知若從全校學生中任選兩人，則兩人均為男生的機率恰為 $\frac{1}{2}$，則全校男生共有__________人。

## 二、計算、證明與論述題(共 44 分)

1. 對於任意正整數 $n$，定義多項式函數 $\begin{cases} p_1(x)=x^2-2 \\ p_{n+1}(x)=(p_n(x))^2-2 \end{cases}$，請回答下列問題：

(1) 設 $x\in(-2,2)$，求 $p_{10}(x)$ 的最大值與最小值。(6 分)

(2) 求 $p_{10}(x)=0$ 之相異實根個數。(3 分)

(3) 若定義 $\alpha_n$ 是 $p_n(x)=0$ 的最大實根(舉例來說，$\alpha_1=\sqrt{2}$)，請證明對於所有正整數 $n$，$\alpha_n<\alpha_{n+1}<2$ 恆成立。(8 分)

2. 設實數 $a$、$b$ 滿足 $a\geq b>0$ 且 $ab=2$，請回答下列問題：

(1) 求 $\frac{a^2+b^2}{a-b}$ 的最小值，以及此時的數對 $(a,b)$。(4 分)

(2) 求 $5a+4b$ 的最大值與最小值，以及此時的數對 $(a,b)$。(4 分)

(3) 求 $4a+5b$ 的最大值與最小值，以及此時的數對 $(a,b)$。(4 分)

(4) 承上題，請寫出學生在解第(3)小題時，常見的錯誤類型或迷思概念。(4 分)

3. 在數學「直線與圓」單元中提到，坐標平面上一點 $P(m,n)$ 到直線 $L:ax+by+c=0$ 的距離 $d(P,L)=\left|\frac{am+bn+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$。請回答下列問題：

(1) 請以高職一年級學生的先備知識為基礎證明上式。(5 分)

(2) 現有一道問題「求平面上一點 $P(1,2)$ 到直線 $L:x+y=-3$ 的距離。」除了使用「點到直線的距離」公式之外，請你另寫出 2 種給高職二年級學生的解答。(6 分)