國立中科實驗高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選

雙語部-數學科專業知能試題

一、填充題：共 16 題，每題 5 分

1. 若$\triangle ABC$三邊長均為整數，且各邊邊長均不大於100，則有_______個不全等的三角形。

2. 設平面上有不共線的O, A, B相異三點，已知$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$、$\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = 1$，且 $\overrightarrow{OP} = (\cos\theta - \sin\theta)\overrightarrow{OA} + (\cos\theta + \sin\theta)\overrightarrow{OB}$，$0 \le \theta \le 2\pi$，則$P$點在平面上所圍成的區域面積為__________。

3. $\triangle ABC$中，若滿足$\dfrac{\sin A + \sqrt{3}\cos A}{\cos A - \sqrt{3}\sin A} = \tan\dfrac{7\pi}{12}$，則$\sin 2B + 2\cos C$的最大值為__________。

4. 求值：$\sum_{n=1}^{25}\left(\dfrac{1}{1\times2+2\times3+3\times4+4\times5+\cdots+n(n+1)}\right)=$_______。

5. 已知 x 為實數，則 $f(x)=\dfrac{4x^2-24x+121}{\sqrt{x^2-6x+10}}$ 的最小值為_______。

6. 已知空間中兩直線 $L_1:2x=4y-4=2z-3$ 、 $L_2:\dfrac{3}{2}x+3=6-y=12-3z$ 同時落在一平面 E 上，若平面 E 外有一點 $A(2,-\dfrac{1}{2},-\dfrac{3}{2})$ ，其中點 A 關於平面 E 的投影點為點 H ，且點 H 關於兩直線 L_1 、 L_2 的投影點分別為 M 、 N ，則線段 $\overline{MN}=$__________。

7. 某國家的地鐵車廂共有8節，該國最近舉辦神奇寶貝動漫祭，今天要在某一列車中，取出5節車廂畫上神奇寶貝的圖樣，每節車廂均畫上完全不同的神奇寶貝，其候選圖案如下：

水系：傑尼龜、小鋸鱷、波加曼

火系：小火龍、火球鼠、小火焰猴

草系：妙蛙種子、菊草葉、草苗龜

電氣系：皮卡丘

在彩繪時有以下限制：

(I)在未畫上圖樣的車廂均設立廁所，且任2間設立廁所的車廂均不相鄰；

(II)皮卡丘必須畫在第一節車廂，且最後一節車廂必須彩繪；

(III)水系、火系、草系神奇寶貝皆至少各選1隻來彩繪；

(IV)水系神奇寶貝的車廂必須相鄰，且必須畫在「火系與草系神奇寶貝車廂」前方。

請問：在這些限制條件下，彩繪車廂的方法共有__________種。

8. 將區域 $\Re=\begin{cases} y\le\sqrt{25-x^2} \\ x-2y+5\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$ 繞 x 軸旋轉一圈後，得到立體圖形的體積為__________立方單位。

9. 已知$z=-\frac{2}{1+\sqrt{3}i}$，求 $\frac{1}{5}+z+z^2+z^3+\cdots+z^{2024}+z^{2025}=$ ________。

10. 投擲兩顆骰子 24 次，令 X 表示第一顆骰子出現點數大於第二顆骰子出現點數的個數，則 Var(X)= ________。

11. 在不大於 10^4 的正整數中，有多少個數________可以被 3、5、與 7 整除。

12. 求在球面上 $x^2+y^2+z^2=9$ 距離點(1, 1, 1)最遠的點是 ___________。

13. 滿足 $x\geq 4$、$y\geq 5$、$z\geq 3$ ，方程 $x+y+z=24$ 有多少組__________整數解。

14. 在立方體的展開圖裡，有多少個__________不同形狀(不能相疊重合)。

15. 設 tanα、tanβ 是 $5x^2-3x-1=0$ 的兩根，求 $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$ 的值是 ____________。

16. 平面上有 8 個圓，其中每兩個圓相交且任三個圓不通過同一點，這 8 個圓將平面分成幾部分____________。

二、計算題：共 2 題，每題 10 分

1. 設二階方陣 $A=\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & 1 \\ -\frac{2}{3} & -1 \end{bmatrix}$ 且 $I_2=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，

(1) 設 $k \in R$，且矩陣 A 滿足 $A(A-I_2)=k(A-I_2)$，試求 k 值。

(2) 設 n 為自然數，利用(1)的結果，試求 $\lim\limits_{n\to\infty} A^n$。

2. 試求曲線 $(x-y)^2=\sqrt{2}(x+y)$ 被直線 $x+y=4\sqrt{2}$ 截出區域的面積。