教育部受託辦理113學年度
公立高級中等學校教師甄選

數學科　試題

作答注意事項

1. 本試題共兩部分：選擇題 12 題，及綜合題 2 大題，共計100分；
2. **選擇題請用2B軟心鉛筆在<u>答案卡</u>劃記，綜合題限用藍色、黑色原子筆或鋼筆在<u>答案本</u>上作答，但繪圖時得使用黑色鉛筆。**
3. <u>本科不可以使用電子計算器。</u>

第一部分：選擇題（共40分）

一、單選題（每題3分，共24分）

(D) 1. 在 ΔABC 中 a,b,c 分別為角 A,B,C 的對邊，向量 $\overrightarrow{u}=(b,3a-c)$，$\overrightarrow{v}=(\cos B,\cos C)$，且 $\overrightarrow{u}\,//\,\overrightarrow{v}$，求 $\cos B=$？

(A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\frac{3}{\sqrt{10}}$ (D) $\frac{1}{3}$。

(D) 2. 若 $f(x)=2^x-\frac{1}{2^x}$，求 $f(\log_4(\log_5 4))+f(\log_4(\log_4 5))=$？(A)5 (B) $\sqrt{2}$ (C)1 (D) 0。

(C) 3. 任意的選取兩個正整數 a，b 且 $1\le a,b\le 9$。試問點 (a,b) 落在拋物線 $y=ax^2-bx$ 上方的機率為何？

(A) $\frac{15}{81}$ (B) $\frac{17}{81}$ (C) $\frac{19}{81}$ (D) $\frac{7}{27}$。

(B) 4. 設 $a,\,b$ 為整數且 $(a+3i)(b+i)=12+14i$，若 $\alpha,\,\beta$ 分別為 $a+3i$ 及 $b+i$ 的主輻角 $(0^\circ\le\alpha,\beta<360^\circ)$，令 $\theta=\alpha+\beta$，下列何者正確？

(A) $\theta=45^\circ$ (B) $45^\circ<\theta<60^\circ$ (C) $\theta=60^\circ$ (D) $60^\circ<\theta<90^\circ$。

(D) 5. 設 $f(x)=x+3+\int_0^1 g(x)dx$，$g(x)=2x-9+\int_0^2 f(x)dx$，試求 $f(3)=$？

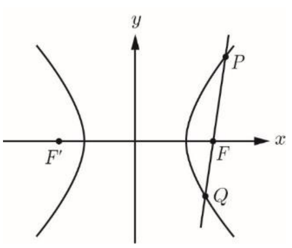
(A)0 (B)2 (C)4 (D)6。

(D) 6. 已知 ΔABC 的三邊長為 a,b,c，且 $\log_a b$ 是方程式 $x^2-2x+\sin C+\cos C=0$ 的重根，問 ΔABC 是哪一種三角形？

(A)銳角三角形 (B)正三角形 (C)鈍角三角形 (D) 等腰直角三角形。

(C) 7. 在某教師甄試中規定 N 位參加筆試者，可進入複試的人數為 $2^{1+[\log_2(N-1)]}-N$。已知進入複試的人數為19位，試問最小的兩個可能 N 的值之和為何？($[x]$ 代表不大於 x 的最大整數) (A)38 (B)90 (C)154 (D) 406。

(D) 8. 如圖，雙曲線 Γ：$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$ 中，過焦點 F 作一焦弦 $\overline{PQ}$，已知 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的斜率為1，則 $\overline{PF'}+\overline{QF'}=$？ (A)32 (B)36 (C)40 (D)48。



二、複選題（每題4分，共16分）

(ABC) 9. 設 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 之圖形的所有切線中，以過切點(1, 0)之切線斜率為最小，且此切線亦通過原點，則下列哪些選項是正確的？
(A) $f''(1)=0$ (B) $f(x)$ 沒有極大值 (C) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸相切 (D)方程式 $f(x)=1$ 有三相異實根。

(AD) 10. 在實數線上，動點 A 從原點開始往正向移動，動點 B 從8的位置開始往負向移動。兩個動點每一秒移動一次，已知第一秒 A、B 移動的距離分別為1、4，且 A、B 每次移動的距離分別為其前一次移動距離的 $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍。令 c_n 為第 n 秒時 A、B 的中點位置。試選出正確的選項。
(A) $c_1=\frac{5}{2}$ (B) $c_2>c_1$ (C)數列 $\langle c_{n+1}-c_n\rangle$ 是一個等比數列 (D) $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=2$。

(BCD) 11. 投擲一枚不均勻硬幣，出現正面的機率為 $\frac{3}{4}$，出現反面的機率為 $\frac{1}{4}$。今丟擲此硬幣5次，若X表示出現正面的次數，則下列敘述何者正確?
(A)$X=1$的機率為 $\frac{15}{512}$ (B)$X=2$的機率小於$X=3$的機率 (C)X的期望值為 $\frac{15}{4}$ (D)X的標準差為 $\frac{\sqrt{15}}{4}$。

(BD) 12. 已知 $C_1:(x-1)^2+y^2\le 1$，$C_2:x^2+(y-1)^2\le 1$，試選出正確的選項。
(A) C_1 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 π^2 立方單位 (B) C_1 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 $\frac{4}{3}\pi$ 立方單位 (C) C_2 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 π^2 立方單位 (D) C_2 繞 x 軸旋轉所得的旋轉體體積為 $2\pi^2$ 立方單位。

第二部分：綜合題（共60分）

一、填充題（每格4分，共36分）

1. 設 $f(x)=x^2-16$，若 $P=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_k,\cdots,x_{n-1},x_n\}$ 為[1,3]的 n 等分割，$n\in N$，且知黎曼下和 L_n，且知黎曼上和 U_n，若 $|U_n-L_n|<\frac{1}{10000}$，試求最小之自然數 n？n=160001

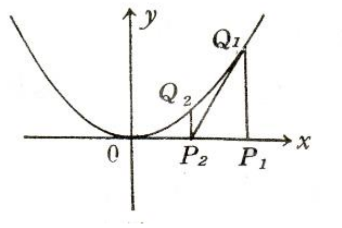
2. θ 為某一角度，方程組 $\begin{cases} x\cos\theta-y\sin\theta=4 \\ x\sin\theta+y\cos\theta=3 \end{cases}$，的解為 $(1,2\sqrt{6})$，試求 $\begin{cases} x\cos\theta-y\sin\theta=-3 \\ x\sin\theta+y\cos\theta=4 \end{cases}$ 的解 (x,y)。$(-2\sqrt{6},1)$

3. 設O為ΔABC的外心，若$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$，則$\sin\angle BAC=$？$\frac{\sqrt{21}}{6}$

4. 已知$a>b>0$，a,b,c為整數，且$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{x^6-1}=2$，試求$a,b,c$之值。

$a=4,b=1,c=-6$

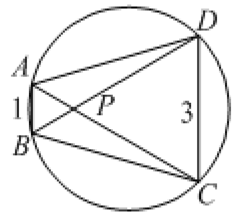
5. 自$P_1(1,0)$作x軸的垂直線交拋物線$y=x^2$於$Q_1(1,1)$，再由Q_1作此拋物線的切線交x軸於P_2，又自P_2作x軸的垂線交此拋物線於Q_2，如此依序進行，試求級數$\overline{P_1Q_1}+\overline{P_2Q_2}+\cdots\cdots+\overline{P_nQ_n}+\cdots\cdots$之和。$\frac{4}{3}$



6. 有一個n項的等差數列$\langle a_n\rangle$，若公差為$\frac{\sqrt{13}}{2}$且此數列的變異數為260，試問項數$n=$？$n=31$

7. 如右圖，圓內接四邊形$ABCD$中，$\overline{AB}=1$，$\overline{CD}=3$，$\overline{BD}=4$，$\angle ABD=60^\circ$，設$\overline{AC}$與$\overline{BD}$相交於P點，求ΔBCP面積。

$\frac{3\sqrt{3}}{4}$



8. 最新網路遊戲CS2 online因電腦配備需求較高，在每次大戰中，造成每顆CPU lag（延緩執行程式）的機率為P，現有相同製程、規格的雙核心（2顆CPU）與四核心（4顆CPU）兩臺電腦，研究人員指出，若一半以下（含一半）的CPU發生lag仍可完成1次大戰，今欲使四核心電腦完成1次大戰的機率大於雙核心電腦，研究人員應將P校正到範圍？$0<P<\frac{1}{3}$

9. $x\in R$，$f(x)=x^2-4x+3$，若$f(|x|)=|f(x)|$，則x的範圍為何？$0\le x\le 1$或$3\le x$

二、計算證明題（每題8分，共24分）

1. n筆數據(x_i,y_i)，$1\le i\le n$，若n筆數據(x_i,y_i)的相關係數存在並記為r，試用高中數學的方法證明$|r|\le 1$。

2. 請利用108課綱高一學生可以理解的方法證明：已知點$P(x_0,y_0)$，直線$L:ax+by+c=0$，則P到L的距離為$\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$。

3. 令$x_1,x_2,\cdots,x_{18}$為方程式$x^{18}+4x^{11}+1=0$的18個根，

求$(x_1^4+x_1^2+1)(x_2^4+x_2^2+1)\cdots(x_{18}^4+x_{18}^2+1)$的值為何？