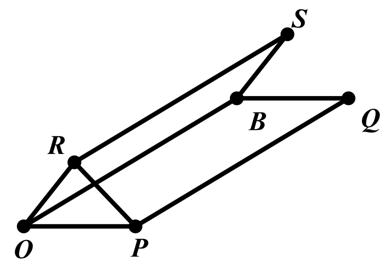
新竹中學113學年度教師第一次教師甄試數學科題目卷

一、填空題：12格，每格6分

1. 設雙曲線$\Gamma:\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{2}=1$兩焦點$F_1, F_2$，以及$\Gamma$上一點$P(3,-2)$。若以$P$點為切點的切線交$x$軸於點$Q$，且$\angle F_1PQ=\theta$，試求$\tan\theta=$？

2. 三角形ΔABC中，三頂點A,B,C對面的三邊長分別為a,b,c。若$a+c=2b$，且角$A-C=\frac{\pi}{3}$，試求$\cos B=$ __________。

3. 如圖，設平行四邊形$OPQB$的面積為28，平行四邊形$ORSB$的面積為14，以及三角形ΔOPR的面積為7。



若$\overrightarrow{OB}=x\overrightarrow{OP}+y\overrightarrow{OR}$，則數對$(x,y)=$__________。

4. 同時擲兩粒公正骰子，求點數和為5比點數和為7先出現的機率為何？__________

5. 設P是正方形ABCD內部一點，且P到A、B、C三頂點的距離分別為 1、2、3，求此正方形的面積。

6. $f(x)=\sqrt{4-3x}+\sqrt{2x-1}$，$\frac{1}{2}\le x\le\frac{4}{3}$，當$x=\alpha$時，$f(x)$有最大值M，求數對$(\alpha,M)=$_____

7. 已知實係數二次方程式$x^2-ax+b=0$有兩實根α,β滿足$-1\le\alpha\le 0$且$1\le\beta\le 2$，若a^2+b^2有最大值M與最小值m，則數對$(\mathrm{M},m)=$_________。

8. 設有5個二維數據，其統計資料如下：$\mu_x=2$，$\mu_y=8$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=30$。如果小毅在求y對x的迴歸直線方程式時，不慎將斜率公式誤植為$\dfrac{\sum_{i=1}^{5}(x_i+\mu_x)(y_i+\mu_y)}{\sum_{i=1}^{5}(x_i+\mu_x)^2}$，求得斜率為$\frac{10}{3}$，其餘計算沒有錯誤，則正確的迴歸直線方程式為______。

（其中μ_x為x的算術平均數，μ_y為y的算術平均數）

9. 設四面體$ABCD$中，$A(2,3,6)$, $B(6,2,3)$, $C(3,6,2)$，$\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}$且兩直線$\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CD}$的距離為$\frac{13}{\sqrt{10}}$，求頂點D的座標=_______。

10. 在直角坐標平面上，已知圓C的半徑為$4\sqrt{13}$且圓心在第三象限。從圓C外一點P對圓C作兩條切線，切點為A, B而斜率為$\frac{2}{3},\frac{3}{2}$。若ΔPAB的外接圓的圓心為$(6,4)$，求圓C的圓心的座標=_______。

11. 設$a_n=\sin\frac{1^\circ}{n}\cdot\frac{1\times2\times3\times4+2\times3\times4\times5+\cdots+n(n+1)(n+2)(n+3)}{1\times2\times3+2\times3\times4+\cdots+n(n+1)(n+2)}$，求$\lim_{n\to\infty}a_n=$_______。

12. 在直角坐標平面上，圓$x^2+y^2=1$先被$A=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3}\\ \frac{1}{2} & -3\end{bmatrix}$變換為曲線$\Gamma_1$，再被

$$B=\begin{bmatrix}\cos8^\circ & \sin8^\circ\\ \sin8^\circ & -\cos8^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos9^\circ & \sin9^\circ\\ \sin9^\circ & -\cos9^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos10^\circ & \sin10^\circ\\ \sin10^\circ & -\cos10^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos11^\circ & \sin11^\circ\\ \sin11^\circ & -\cos11^\circ\end{bmatrix}\cdots\cdots\begin{bmatrix}\cos66^\circ & \sin66^\circ\\ \sin66^\circ & -\cos66^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos67^\circ & \sin67^\circ\\ \sin67^\circ & -\cos67^\circ\end{bmatrix}$$

變換為曲線Γ_2，求Γ_2的方程式為________。

二、計算證明題：3 題(28 分)

1. 若數列$\langle a_n \rangle$滿足$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} = 3a_n + 1, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(1)試求a_n的一般式(3 分)　(2)證明$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} < \frac{3}{2}$(5 分)

2. 設三正數a,b,c滿足$ab - \frac{11}{6}b = -1$，$bc - \frac{9}{4}c = -1$，$ac - \frac{8}{3}a = -1$，則$c =$________。(10 分)

3. 著名的 Bernoulli 不等式說，對於給定的正整數n，不等式「$(1+x)^n \geq 1 + nx$」在$x \geq -1$時恆成立。本題希望推廣此不等式。今設n是大於 1 的奇數。

(1) 試證：恰有一個小於-2的實數x_n，使得不等式「$(1+x)^n \geq 1 + nx$」在$x \geq x_n$時恆成立。(4 分)

(2) 承(1),試證：$\lim\limits_{\substack{n 為奇數 \\ n \to \infty}} x_n = -2$。(6 分)

答案:

一、填空題：12 格，每格 6 分

1	2	3
$\frac{\sqrt{5}}{5}$	$\frac{5}{8}$	$(1,2)$
4	5	6
$\frac{2}{5}$	$5+2\sqrt{2}$	$(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}\sqrt{6})$
7	8	9
$(5, \frac{1}{2})$	$y - 8 = -2(x-2)$	$(8,8,8)$ 或 $(\frac{-2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{-2}{3})$
10	11	12
$(-20, -22)$	$\frac{\pi}{225}$	$x^2 + \frac{y^2}{12} = 1$

二、計算證明題：3 題(28 分)

1.(1)$a_n = \frac{3^n - 1}{2}$，$n \in \mathbb{N}$(3 分)　(2)略(5 分)

2. $\frac{2}{3}$ 或 $\frac{28}{15}$ (10 分)

3. (1) 略 (4 分)　(2)略 (6 分)