

國立鳳新高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選
【數學科】試題

請於考試鈴聲響起後再翻頁作答

— 作答注意事項 —

考試時間：100 分鐘

作答方式：

- 一、全卷作答時須詳述演算過程與清楚標明答案
- 二、請於答案卷上註明題號、答案
- 三、考試結束，答案本和試題務必繳回

國立鳳新高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選
【數學科】試題

一、計算證明題 (第 1 題至第 10 題每題 8 分，第 11 題至第 12 題每題 10 分)

1. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=3$ 、 $\overline{AC}=6$ 、 $\overline{BC}=7$ ， O 為外心、 I 為內心，求 $\overline{OI} \cdot \overline{BC}$ 。
2. 已知 $0 < \theta < \pi$ ，求 $\sin 2\theta + 2\sin \theta$ 的最大值並寫出此時之 θ 值為何？
3. 將 6 個編號為 1 到 6 號的小球放入編號為 1 到 5 號的盒子中，不允許有空盒，且任意一個小球都不能放在有相同編號的盒子內(球號與盒子編號不同)，則共有多少種不同的放法？
4. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=\overline{AC}=2$ ， \overline{BC} 邊上有 100 個相異點 $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{100}$ ，若 $m_i = \overline{AP_i}^2 + \overline{BP_i} \cdot \overline{CP_i}$ ($i=1, 2, \dots, 100$)，則 $m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_{100}$ 之值為何？
5. $\triangle ABC$ 中，設 $\overline{AB}:\overline{AC}:\overline{BC}=3:5:7$ 。令 I 為 $\triangle ABC$ 的內心，直線 AI 交 $\triangle ABC$ 外接圓於另一點 D ，試求 $\frac{\overline{ID}}{\overline{AD}}$ 的值。
6. 設 X 為一隨機變數，若 $X \sim B(10, 0.1)$ ，試求 $E(X^3)$ 的值。

國立鳳新高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選
【數學科】試題

7. 已知實數 x, y 滿足 $(x - \sqrt{x^2 - 2024})(y - \sqrt{y^2 - 2024}) = 2024$ ，則
 $3x^2 - 2y^2 + 3x - 3y - 2023 = ?$
8. 設三次方程式 $5x^3 - 5(k+1)x^2 + (71k-1)x + 1 - 66k = 0$ 的三個根均為自然數，求自然數 k 為多少？
9. 已知 4 條拋物線 $\Gamma_1: y = x^2 + a$ ， $\Gamma_2: y = -x^2 - a$ ， $\Gamma_3: y^2 = x - a$ ， $\Gamma_4: y^2 = -x - a$ ，其中 a 為正實數，若任相鄰兩條拋物線均相切，試求這 4 條拋物線所圍成之區域面積。
10. 空間中兩歪斜線 $L_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-2}$ ， $L_2: \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-2}$ ， P 在 L_1 上，且 Q, R 都在 L_2 上，若 $\triangle PQR$ 為正三角形，求 $\triangle PQR$ 的最小面積為多少？
11. 設 z_1, z_2 為複數， $|z_1| = |z_1 + z_2| = 3$ ， $|z_2 - z_1| = 3\sqrt{3}$ ，求 $\log\left(\left|(z_1 \bar{z}_2)^{2000} + (\bar{z}_1 z_2)^{2000}\right|\right) = ?$
12. 試證明：對於任意正整數 n ， $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \cdots + \frac{1}{2n} < \frac{\sqrt{2}}{2}$ 恒成立。