桃園市立陽明高中 113 學年度教師甄選

數學科筆試測驗題目卷

一、填充題：(12 題，每題 5 分，共 60 分)

1. $\triangle ABC$ 三邊所在的直線分別為 L_1：$3x-4y=6$，L_2：$11x+2y=22$ 及 L_3。已知 L_1 與 L_2 的交點為 A，$\overline{AD}$為$\overline{BC}$邊上的高，且 D 點坐標為$(-2,-8)$，則 $\triangle ABC$ 面積為何？

2. 求$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{80}{n}\left[\left(\frac{3}{n}\right)^4+\left(\frac{8}{n}\right)^4+\left(\frac{13}{n}\right)^4+\cdots+\left(\frac{5k-2}{n}\right)^4+\cdots+\left(\frac{5n-2}{n}\right)^4\right]$之值為何？

3. 一組 12 個數：3，6，7，10，11，14，21，25，33，36，40，42。從中任取 4 個不同的數，則這 4 個不同數的中位數為 23 的機率為何？

4. *AAAABBBCCC* 排成一列，相同字母不相鄰的排法有多少種？

5. 請計算 $22^{17}+24^{17}$除以 529 的餘數為何？

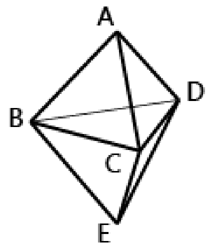
6. 已知空間中ΔABC的三頂點分別為$A(1,-4,4),B(3,-2,2),C(4,2,-2)$，有一平面$E:x+by+cz+d=0$分別交於$\overline{AB},\overline{AC}$於$P,Q$兩點，且$\overline{AC}$垂直平面$E$，若$\Delta ABC$面積為$\Delta APQ$面積的 30 倍，求$d$的值為何？

7. 整係數方程式$x^2+(m+1)x-3(m+1)=0$有整數解，求m的值為何？

8. 坐標平面上，設單位圓上一點P，$\overline{OP}$與x軸正向夾角為θ。今對P做以下兩種線性變換：「以原點O為圓心將P旋轉3θ」，與「將P對$L: y=x$鏡射」，變換後得相同Q點，則滿足此條件的P點有多少個？

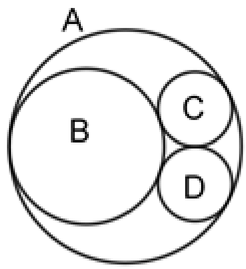
9. 陽明高中校內數學競賽共有 12 道題目，出題老師將這 12 道題目依照難度分成 1 到 12，如果希望出題時難度為k的題目排在難度為$k+2$的題目之前，且已知$1 \le k \le 10$，則將會有多少種出題方式？

10. 如右圖，一個永恆生命體在此立體中的 5 個頂點間移動：從 A 點出發，每經過一個單位時間，就隨機移動到相鄰的頂點上，永不停歇。則此永恆生命體在長久未來達成穩定平衡的情況下，出現在 A 點的機率為何？



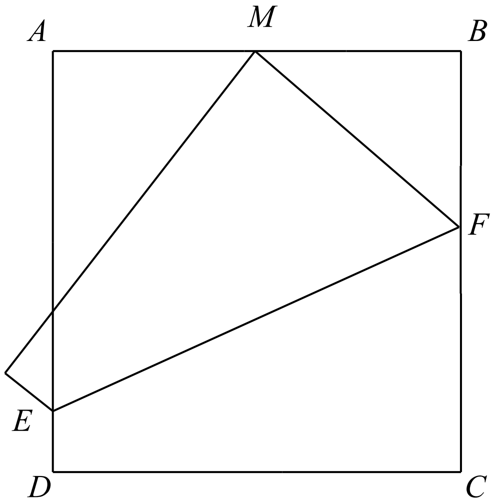
11. 若曲線$y=2x-x^2$與 x 軸所圍部分面積被直線$y=mx$二等分，則m的值為何？

12. 如右圖，圓 *B*、*C*、*D* 兩兩外切並都與圓 *A* 內切，若圓 *A* 半徑為 3，圓 *B* 半徑為 2 ，圓 *C* 與圓 *D* 全等，則圓 *C* 半徑為何？



二、計算證明題：(5 題，每題 8 分，共 40 分)

1. 如下圖，將長 $\overline{AB}=240$ ，寬 $\overline{BC}=288$ 的長方形紙張對摺，讓頂點 C 剛好落在 $\overline{AB}$ 的中點 M 上：



若 $\overline{EF}$ 是摺線，則摺線 $\overline{EF}$ 的長度為多少？

2. 試證：橢圓上離焦點最遠與最近的點為長軸兩端點。

3. 坐標平面上，函數 $T(x)=7\sin\left(113x+\dfrac{\pi}{2}\right)+4\sqrt{2}\sin\left(113x+\dfrac{5\pi}{4}\right)+2024$ ，其中 $x>0$ 。今有一直線 $y=k$ 與函數 $T(x)$ 有交點，n 為正整數且交點從左到右為 $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3),\cdots,(a_n,b_n),\cdots$ 。令 $c_n=a_{n+1}-a_n$ ，已知 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ 存在，則 k 的值為何？

4. 空間中，已知點 $A(3,-10,11)$，直線$L_1:\begin{cases}x=2+t\\y=-1+2t\\z=3-2t\end{cases}$，$t\in\mathbb{R}$ 與

$L_2:\begin{cases}x=-1+2s\\y=2-2s\\z=-s\end{cases}$，$s\in\mathbb{R}$，今由 A 點出發，經過 L_1 上一點再到達 L_2 上一點，求此路徑的最小值？

5. ΔABC 中，$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=6$，$\angle BAC=60^\circ$，已知 D 為 $\overline{BC}$ 中點，O 為 $\overline{AD}$ 上一動點，若 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$ 的最大值與最小值分別為 M 與 m，試求數對 $(M,m)=$？