桃園市立陽明高中 113 學年度教師甄選數學科筆試測驗答案

一、填充題：(12 題，每題 5 分，共 60 分)

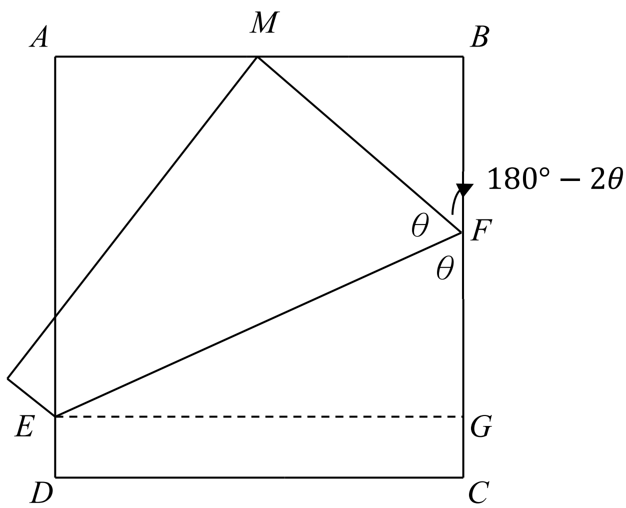
1. 50　2. 10000　3. $\dfrac{31}{495}$　4. 248　5. 253　6. $d=12$

7. $m=3,\ -1,\ -13,\ -17$　8. 5　9. 924　10. $\frac{1}{6}$　11. $m=2-\sqrt[3]{4}$

12. $\dfrac{24}{25}$

二、計算證明題：(5 題，每題 8 分，共 40 分)

1. **【解答】**：260



如右圖所示，設 $\angle EFC=\theta$。

因為對折，所以 $\angle EFM=\theta$，

即 $\angle MFB=180^\circ-2\theta$，

推得 $\angle FMB=2\theta-90^\circ$。

過 E 點做水平線 $\overline{EG}$ 交 $\overline{BC}$ 於 G 點。

因為 $\overline{AB}=240$，又 M 為 $\overline{AB}$ 的中點，

所以 $\overline{MB}=120$，$\overline{EG}=\overline{AB}=240$。

由直角三角形 EFG 知

$\sin\theta=\dfrac{\overline{EG}}{\overline{EF}}=\dfrac{240}{\overline{EF}}$，即 $\overline{EF}=\dfrac{240}{\sin\theta}$。又

$$288=\overline{BC}=\overline{BF}+\overline{FC}=\overline{BF}+\overline{FM}=\frac{120}{cos(2\theta-90°)}+120\,tan(2\theta-90°)$$

$$=\frac{120}{\sin 2\theta}-120\cot 2\theta$$

$$=120\frac{1-\cos 2\theta}{\sin 2\theta}$$

$$=120\frac{2\sin^2\theta}{2\sin\theta\cos\theta}$$

$$=120\tan\theta$$

解得 $\tan\theta=\dfrac{12}{5}$，即 $\sin\theta=\dfrac{12}{13}$。

將 $\sin\theta=\dfrac{12}{13}$ 代入 $\overline{EF}=\dfrac{240}{\sin\theta}$，得

$$\overline{EF}=\frac{240}{\sin\theta}=240\times\frac{13}{12}=260$$

2. **參考證明：**

不失一般性的情況下，假定橢圓方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，右邊焦點 $F(c,0)$ 滿足 $b^2=a^2-c^2$

設 $P(a\cos\theta,b\sin\theta)$ 為橢圓上一點，則

$$\begin{aligned}\overline{PF}^2&=(a\cos\theta-c)^2+(b\sin\theta)^2\\&=a^2\cos^2\theta-2ac\cos\theta+c^2+b^2\sin^2\theta\\&=(a^2-b^2)\cos^2\theta-2ac\cos\theta+c^2+b^2\\&=c^2\cos^2\theta-2ac\cos\theta+a^2\\&=(c\cos\theta-a)^2\end{aligned}$$

$\because c<a$

$\therefore$ (1)當 $\cos\theta=1$ 時（即 $\theta=0$，此時 P 為長軸離 F 較近之端點）

$\min(\overline{PF}^2)=(c-a)^2\Rightarrow\min(\overline{PF})=a-c$

(2) 當 $\cos\theta=-1$ 時（即 $\theta=\pi$，此時 P 為長軸離 F 較遠之端點）

$\max(\overline{PF}^2)=(-c-a)^2\Rightarrow\max(\overline{PF})=a+c$

故得證

3. **【解答】**：$k=2024或2029或2019$

$$T(x)=7\sin\left(113x+\frac{\pi}{2}\right)+4\sqrt{2}\sin\left(113x+\frac{5\pi}{4}\right)+2024$$

$=3\cos113x-4\sin113x+2024=5\cos(113x+\alpha)+2024$ 其中

$\cos\alpha=\dfrac{3}{5},\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$

當 $k=0+2024或5+2024或-5+2024$ 時，$c_n=a_{n+1}-a_n$ 為定值，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ 存在

當 $k \neq 0+2024$或$5+2024$或$-5+2024$時，$c_n = a_{n+1} - a_n$ 恆有兩種可能，$\lim_{n\to\infty} c_n$ 不存在

答：$k = 2024$或2029或2019

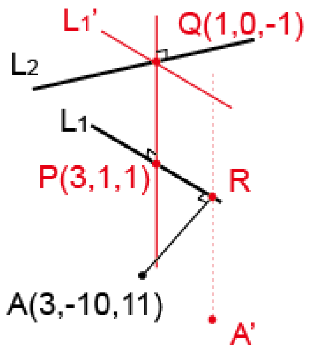
4. **【解答】**：$\sqrt{260} = 2\sqrt{65}$

經由一連串高中數學運算，可得

(1). L_1與L_2 為歪斜線，且方向向量垂直

(2). L_1與L_2 的公垂線在 L_1 上的垂足為 $P(3,1,1)$，在 L_2 上的垂足為 $Q(1,0,-1)$，

$\overline{PQ} = 3$



(3). $d(A, L_1) = 5$，且 A 在 L_1 上的投影點 R 距離 P 為

$\overline{PR} = 14$

$L_1' \parallel L_1$，$\overleftrightarrow{A'R} \parallel \overleftrightarrow{PQ}$，$\overline{A'R} = \overline{AR} = 5$

題目所求等同於「點 A' 經 L_1 上一點再到達 L_2 上一點的最短路徑」

亦即 $\overline{A'Q} = \sqrt{(3+5)^2 + 14^2} = \sqrt{260} = 2\sqrt{65}$

5. **【解答】**：$(M,m) = \left(0, -\dfrac{37}{2}\right)$

由餘弦定理：$\overline{BC}^2 = 8^2 + 6^2 - 2\times 8\times 6\times \dfrac{1}{2} = 52 \Rightarrow \overline{BC} = 2\sqrt{13}$

由中線定理：$8^2 + 6^2 = 2(\overline{AD}^2 + \sqrt{13}^2) \Rightarrow \overline{AD} = \sqrt{37}$

令 $\left|\overrightarrow{OA}\right| = x$，$\left|\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right| = \left|2\overrightarrow{OD}\right| = 2\left(\sqrt{37} - x\right)$，其中 $0 \leq x \leq \sqrt{37}$

則

$$\overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \overrightarrow{OA}\cdot 2\overrightarrow{OD} = x\left(2\sqrt{37} - 2x\right)\cos 180^\circ = 2x^2 - 2\sqrt{37}x = 2\left(x - \frac{\sqrt{37}}{2}\right)^2 - \frac{37}{2}$$

在範圍之下，$(M,m) = \left(0, -\dfrac{37}{2}\right)$