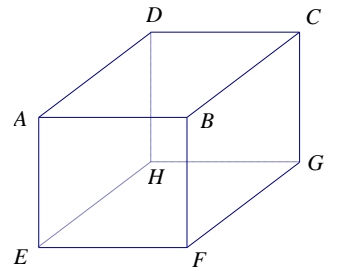


國立嘉義高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選 - 數學科試題

一、填充題：共 18 題，每題 5 分，合計 90 分。

1. 若 a, b 為小於 2024 的正整數且 $\log_a b + 6\log_b a = 5$ ，則數對 (a, b) 有 _____ 組可能。
2. 坐標平面上三直線 L_1, L_2, L_3 ，其斜率分別為 m_1, m_2, m_3 。已知 L_2, L_3 交於 $P(a_1, b_1)$ ， L_1, L_3 交於 $Q(a_2, b_2)$ ， L_1, L_2 交於 $R(a_3, b_3)$ ，若 L_1 向右平移若干單位後，三交點依序變為 $P'(a_1, b_1)$ 、 $Q'(a_2+3, b_2+4)$ 、 $R'(a_3+5, b_3-12)$ ，則有序數組 $(m_1, m_2, m_3) =$ _____。
3. 在複數平面上，複數 z^2 在第二象限，滿足 $|z|=1$ 以及 $\left| \frac{5-12i}{13} - z^3 \right| = \left| \frac{5-12i}{13} - z^5 \right|$ ，其中 $i = \sqrt{-1}$ 。若 z^2 的實部為 a 、虛部為 b ，則 $\frac{b}{a}$ 之值為 _____。

4. 一隻小蟲沿著一個正立方體 $ABCD-EFGH$ 的邊爬行。牠從頂點 A 出發，每分鐘均會從一個頂點走到另一個相鄰的頂點。走了 9 分鐘後，小蟲走到點 G ，請問小蟲所走的路線有 _____ 種不同的可能。



5. 若 $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ ，則 $f(x) = |\sin x + \cos x + \tan x + \cot x + \sec x + \csc x|$ 的最小值為 _____。
6. 已知 a 為整數，且 $f(x) = -x^3 - 2x$ 。對任意實數 x ， $f(ax^2 - 3ax) > f(a+26)$ 恆成立，則滿足上述條件之 a 的個數有 _____ 個。
7. 若同時擲三顆公正骰子，當點數和為 10 時，可得 50 元獎金，並可繼續遊戲，否則就停止。如此繼續進行，試求此遊戲的獎金期望值為 _____ 元。
8. 若 $f(x)$ 為實係數二次多項式，已知 p, q, r 為三相異非零實數使得 $f(p) = qr$ ， $f(q) = rp$ ， $f(r) = pq$ ，試以 p, q, r 表示 $f(p+q+r) =$ _____ (請化至最簡)。

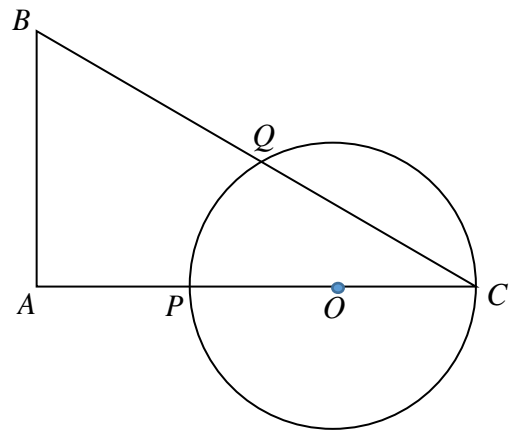
9. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{10n} \frac{400n^2}{400n^2 + (2k-1)^2} =$ _____。

10. 坐標平面上， S 為 $A(10,10)$ 、 $B(-10,10)$ 、 $C(-10,-10)$ 、 $D(10,-10)$ 四點所形成的正方形， S 經矩陣 $\begin{bmatrix} \frac{7}{5} \cos \theta & -\frac{7}{5} \sin \theta \\ \frac{7}{5} \sin \theta & \frac{7}{5} \cos \theta \end{bmatrix}$

變換後為 S' (其中 $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$)，若 A, B, C, D 恰好在 S' 的邊界上，則 $\sin \theta$ 之值為 _____。

11. 設 $A(7,6,3)$ 、 $B(5,-1,2)$ 與一直線 $L: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{-2}$ ，若在 L 上任取一點 P ，使得 $\overline{PA} + \overline{PB}$ 有最小值，求 P 點坐標 _____。

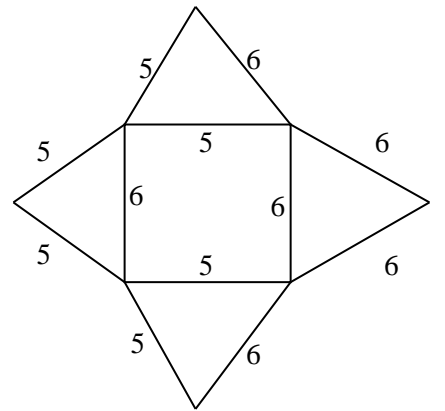
12. 如圖所示，直角 $\triangle ABC$ 與以 \overline{PC} 為直徑的圓交於 P 、 Q 兩點，若 $\overline{AP}=1$ 、 $\overline{AB}=\overline{BQ}=2$ ，則圓形紙板的直徑為_____。



13. 設點 $P(x, y)$ 在橢圓 $\Gamma: \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1$ 上，試求點 P 到直線 $L: 2x - y + 6 = 0$ 有最大距離時的 P 點坐標_____。

14. 假設空間坐標系中滿足 x, y, z 坐標均為整數的點稱為格子點。現有三點 $A(1, 2, 3)$, $B(2, 3, 1)$, $C(2t, 1, -1+t)$ 滿足 $\triangle ABC$ 面積不超過 $3\sqrt{5}$ ，則格子點 C 共有_____個。

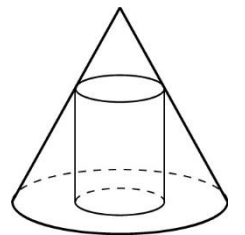
15. 有一底面為矩形的四角錐，其展開圖與邊長如右圖所標示，則此四角錐的體積為_____。(化成最簡根式)



16. 設 k 為實數，若方程式 $x|x-2|=4x+k$ 恰有一個實根，則 k 的範圍為_____。

17. 小明在 113 年 1 月初向銀行借貸 100 萬元，以月利率 2% 複利計算。若他自 113 年 1 月開始，每個月的月底都償還銀行相同的金額，且計畫在兩年(即 24 個月)內還清，則他每個月至少需償還_____元。(無條件進位計算到整數位，且 $(1.02)^{24}$ 約為 1.60843)。

18. 設一直圓錐底半徑為 3，高為 12，有一直圓柱內接於此直圓錐，如右圖所示，則此直圓柱的最大體積為_____。



二、計算證明題：兩小題，配分寫在各小題後，共 10 分

- (1) 在坐標平面上，設 $\triangle ABC$ 經二階方陣 $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 作線性變換後成 $\triangle A'B'C'$ 。若 $\triangle ABC$ 的面積為 Δ ， $\triangle A'B'C'$ 的面積為 Δ' ，試證明： $\Delta' = \left| \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \right| \cdot \Delta$ 。(6 分)

- (2) 試求出滿足 $|2x + y - 113| + |x + 3y - 2024| = 5$ 的所有點 (x, y) 所圍成的區域面積。(4 分)