2024.4.24(四) ~ 2024.4.26(六) Ru

國立臺南女子高級中學 113 學年度第 1 次教師甄選題目(數學科)

一、填充題：(每題 5 分，共 50 分)

注意：所有答案請化簡為最簡分數或最簡根式，否則不予計分

1.設數列 $\langle x_n \rangle$ 滿足 $x_1 = 1$，且對任意正整數 n，$x_n - 2x_n x_{n+1} - x_{n+1} = 0$ 均成立。試求 $\sum_{k=1}^{200} x_k x_{k+1}$ 之值為 $\underline{\frac{200}{401}}$。

$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n} + 2$

$\Rightarrow \frac{1}{x_n} = \frac{1}{1} + (n-1)\cdot 2$

$\Rightarrow x_n = \frac{1}{2n-1}$

$\frac{1}{2k-1} \cdot \frac{1}{2k+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{399} - \left(\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{399} + \frac{1}{401}\right)\right)$

$= \frac{200}{401}$

2. TWICE為韓國JYP娛樂旗下在2015年強勢推出的九人女子團體，成員均透過Mnet生存實境節目《SIXTEEN》脫穎而出。成員包含韓國籍成員志效(隊長)、定延、娜璉、多賢、彩瑛、日本籍成員Momo、Sana、Mina及台灣籍成員子瑜，公司為籌備新專輯於5/3拍攝專輯封面照，已知隊長志效必站在正中央，四位非韓籍的團員不完全站在隊長的同一側，且娜璉跟Momo因近來吵架而不排在一起，則此九人排成一列拍照的排列數有 $\underline{30528}$ 種。

任排 − 韓籍同側 − 娜M.相鄰 + 韓籍同側且M.娜相鄰

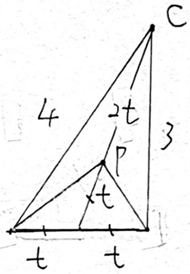
$8! - 4!\cdot 4!\cdot 2 - C^6_1 \cdot 6!\, 2! + 0 = 30528$

_ _ _ _ 志效 _ _ _ _

3.已知 ΔABC 中，$\overline{AC} = 4$、$\overline{BC} = 3$。在 ΔABC 內部有一點 P 滿足 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$，且 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$，則 $\angle C$ 的餘弦值為 $\underline{\frac{5}{6}}$。

重心

中線 thm



$25 = 16 + 9 = 2(9t^2 + t^2) = 10t^2$

$(2t)^2$

$\cos C = \frac{16+9-5}{2\cdot 4\cdot 3} = \frac{5}{6}$

4.已知函數 $f(x) = \int_c^x (t^2 + at + b)\,dt$ 在 $x = 1, 3$ 時有極值，且 $f(0) = \frac{16}{3}$，求實數序對 $(a,b,c) = \underline{(-4,3,-1)}$。

$f'(x) = x^2 + ax + b = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

$\left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right)\Big|_c^0 = \frac{16}{3} \Rightarrow c^3 - 6c^2 + 9c + 16 = 0$

$$\begin{array}{rrrr|r} 1 & -6 & +9 & +16 & -1 \\ +) & -1 & +7 & -16 & \\ \hline 1 & -7 & +16 & 0 & \end{array}$$

$(c+1)(c^2 - 7c + 16) = 0$

$\hookrightarrow D = 49 - 64 < 0$

$c = -1$

5.已知 $x \in [0,3]$，求 $\frac{\sqrt{6x^3 + 7x^2 + 2x}}{3x^2 + 4x + 1}$ 的最大值為 $\underline{\frac{1}{2}}$

$\frac{(3x^2 + 2x) + (2x+1)}{2} \geq \sqrt{6x^3 + 7x^2 + 2x} \Rightarrow \frac{1}{2}$

徐老師提供 好喔！

$2024 = 2\times 1012 = 3\times 674 + 2 = 6\times 337 + 2$

6.若$[x]$表示不超過x的最大整數，求$\sum_{n=1}^{2024}\left(\left[\frac{n}{2}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n}{6}\right]\right)=$ 2047276

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\cdots$	2022	2023	2024
$[\frac{n}{2}]$	0	1	1	2	2	3	3	4	4	$\cdots$	1011	1011	1012
$[\frac{n}{3}]$	0	0	1	1	1	2	2	2	3	$\cdots$	674	674	674
$[\frac{n}{6}]$											337	337	337

$2(1+2+\cdots+1011)+1012$

$+3(1+2+\cdots+674)$

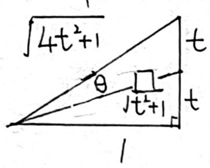
$+6(1+2+\cdots+336)+337\times 3$

$=2\cdot\frac{1012\cdot 1011}{2}+1012$

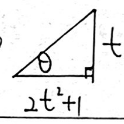
$+3\cdot\frac{675\cdot 674}{2}$

$+6\cdot\frac{337\cdot 336}{2}+337\cdot 3 = 2047276$

$\boxed{7}$ 法: 7.已知非零向量$\vec{a}$和$\vec{b}$互相垂直，若$\vec{a}+\vec{b}$和$\vec{a}+2\vec{b}$的夾角為θ，則$\cos\theta$的最小值為 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$



$$\cos\theta = \frac{4t^2+2}{2\sqrt{4t^2+1}\sqrt{t^2+1}} = \frac{2t^2+1}{\sqrt{4t^2+1}\sqrt{t^2+1}} \Rightarrow$$

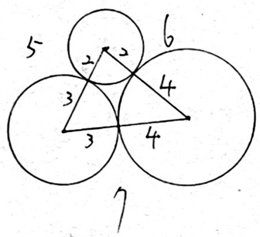


$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{2t+\frac{1}{t}} \le \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\theta \ge \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

or

$$\Rightarrow (\cos\theta)^2 = 1-\frac{t^2}{4t^4+5t^2+1} = 1-\frac{1}{4t^2+\frac{1}{t^2}+5} \ge 1-\frac{1}{2\cdot 2+5} = \frac{8}{9} \Rightarrow \cos\theta \ge \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ or } \cos\theta \le -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

8.有三個半徑分別為2、3、4的圓，且這三個圓兩兩外切，切點分別為A、B、C，則ΔABC的面積為 $\cancel{\frac{48\sqrt{6}}{35}}$。(不合 ∵恆正)



$$\triangle = \sqrt{9\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = 6\sqrt{6}$$

$$1-\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{6}+\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{7}+\frac{4}{7}\cdot\frac{4}{6}\right)$$

$$=1-\frac{14+27+40}{5\cdot 3\cdot 7} = 1-\frac{27}{35} = \frac{8}{35}$$

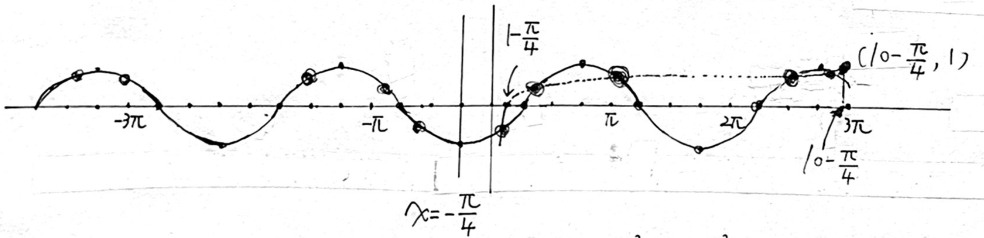
$$\Rightarrow \frac{8}{35}\cdot 6\sqrt{6} = \frac{48\sqrt{6}}{35}$$

9.試求方程式$\sin x-\cos x=\sqrt{2}\log\left|x+\frac{\pi}{4}\right|$的所有實根之和為 $-\frac{5\pi}{2}$。

$$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\log\left|x+\frac{\pi}{4}\right|$$

$$10-\frac{\pi}{4} \doteqdot 10-0.78 = 9.22 < 9.42 \doteqdot 3\pi$$

$$-\frac{\pi}{4}\times 10 = \frac{-5\pi}{2}$$

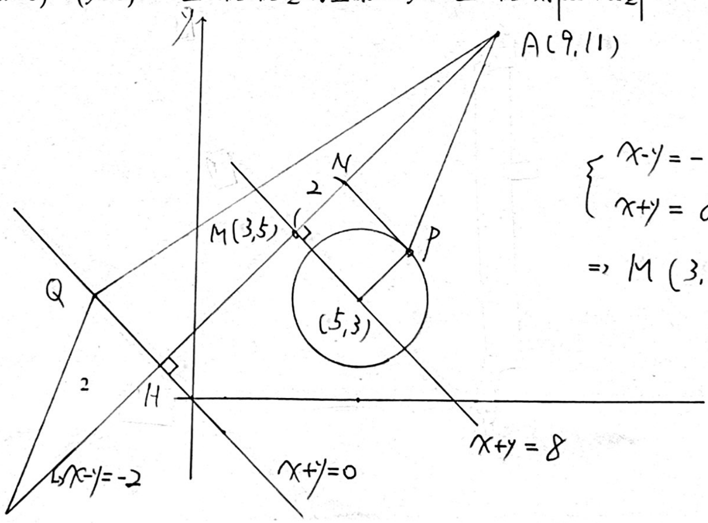


10.在直角坐標系中，已知點$A(9,11)$，點P為圓$C:(x-5)^2+(y-3)^2=4$上一點，點Q為直線$x+y=0$上一點，則$\left|\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}\right|$的最小值為 $16\sqrt{2}-2$。

$$\overline{AH}+\overline{AN}$$

$$=10\sqrt{2}+6\sqrt{2}-2$$

$$=16\sqrt{2}-2$$



$$\begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=8 \end{cases} \Rightarrow M(3,5)$$