

填充題

1. 已知等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的公差 $d \neq 0$ ，等比數列 $\langle b_n \rangle$ 的公比 r 為正有理數且 $r < 1$ 。若 $a_1 = d$ ， $b_1 = d^2$ ，且 $\frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{b_1 + b_2 + b_3}$ 為正整數，則 $r = ?$

【簡答】： $\frac{1}{2}$

2. 設 x, y 為正實數，求 $\frac{6x}{x+3y} + \frac{2y}{x}$ 的最小值？

【簡答】： $\frac{10}{3}$

3. 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_{n-1} = a_n + a_{n-2}$ ， $n \geq 3$ ，設此數列前 n 項和為 S_n ，若 $S_{2023} = 2024$ ， $S_{2024} = 2023$ ，則 $S_{2025} = ?$

【簡答】： -2

4. 設函數 $f(x) = 3\cos(ax+b)$ ，其中 $a > 0$ ， $|b| < \pi$ 。若 $f\left(\frac{5\pi}{8}\right) = 0$ ， $f\left(\frac{11\pi}{8}\right) = 3$ ，且 $f(x)$ 的週期大於 2π ，則 $b = ?$

【簡答】： $\frac{-11}{12}\pi$

5. 已知複數 z 滿足 $12|z|^2 = 2|z+2|^2 + |z^2+1|^2 + 31$ ，則 $z + \frac{6}{z} = ?$

【簡答】： -2

6. 設 O 為 $\triangle ABC$ 的外心， H 為 $\triangle ABC$ 的垂心，若 $|\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}| = \sqrt{3}$ ，則 $|\vec{HA} + \vec{HB} + \vec{HC}| = ?$

【簡答】： $2\sqrt{3}$

7. 已知實數 x, y, z 滿足 $\begin{cases} x^6 + 3x^4 + x^2 = 2 \\ y^6 - 3y^4 + y^2 = -2 \\ 2z^6 - z^4 - 3z^2 = 1 \end{cases}$ ，求 $x^4 + y^4 + \frac{1}{z^4} = ?$

【簡答】： 7

8. 設虛數 z 滿足 $z^7 = 1$ ，求 $z + z^2 + z^4 = ?$

【簡答】： $\frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$

9. 已知正實數 a, b, c 滿足 $a+b+c=32$ 且 $\frac{b+c-a}{bc} + \frac{c+a-b}{ca} + \frac{a+b-c}{ab} = \frac{1}{4}$ ，求以 $\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}$ 為三邊長的三角形的面積最大值？

【簡答】：4

10. 四面體 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = \sqrt{3}$ ， $\overline{AD} = \overline{BC} = \sqrt{10}$ ， $\overline{AC} = \overline{CD} = \overline{BD} = \sqrt{7}$ ，求此四面體的體積？

【簡答】： $\sqrt{2}$

11. 箱子裡有藍色、綠色、白色、紅色的球各一顆，現在每次從箱子裡抽出一球，觀察其顏色後放回箱中。假設任一顏色的球被抽中的機率相同，若連續兩次抽出紅球後即停止抽球，則抽球次數的期望值為何？

【簡答】：20

12. 設 θ, ϕ 為銳角且 $\frac{\sin^{2024} \theta}{\cos^{2022} \phi} + \frac{\cos^{2024} \theta}{\sin^{2022} \phi} = 1$ ，則 $\sin^{2023} \theta - \cos^{2023} \phi = ?$

【簡答】：0

13. 已知實數 a, b, c 滿足 $a+b+c=5$ 且 $ab+bc+ca=7$ ，若 abc 的最大值為 M ，最小值為 m ，則 $M+m = ?$

【簡答】： $\frac{130}{27}$

14. 設 a, b, c, d 為相異四數且 $\{a, b, c, d\}$ 為 $\{x | x \in N, 1 \leq x \leq 17\}$ 的子集，若 $17 | (a-b+c-d)$ ，則稱 $\{a, b, c, d\}$ 為高斯集，則共有多少個高斯集？

【簡答】：476

15. 設 a, b, c 分別是 $\triangle ABC$ 中 $\angle A, \angle B, \angle C$ 的對邊長， S 為 $\triangle ABC$ 的面積，已知 $1 + \frac{\tan B}{\tan A} = \frac{2c}{\sqrt{3}a}$ ，求 S 值的範圍？

【簡答】： $\frac{\sqrt{3}}{2} < S < \frac{2\sqrt{3}}{3}$

16. 設 a, b, c, d, e 為相異正整數，則滿足 $a+b+c=d+e=29$ 的序組 (a, b, c, d, e) 共有幾組解？

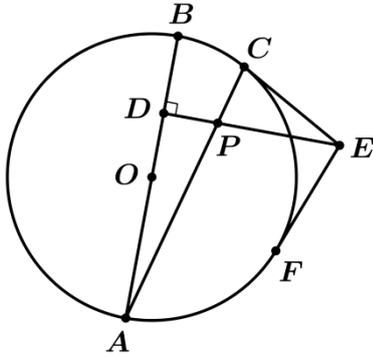
【簡答】：7392

17. 已知拋物線 $y = x^2 + bx + c$ 通過點 $(-2, 5)$ ，且圖形交 x 軸於 A, B 兩點，交 y 軸於 C 點，設拋物線頂點為 M ，若四邊形 $ACMB$ 面積為 9，求數對 $(b, c) = ?$

【簡答】： $(-2, -3)$

計算證明題

1. 如圖所示， \overline{AB} 為圓 O 的直徑， P 為圓內部一點但不在 \overline{AB} 上，直線 AP 交圓於另一點 C ，過 P 作 \overline{AB} 的垂線交 \overline{AB} 於 D ，且交以 C 為切點的圓的切線於 E ，再過 E 點作圓的另一條切線交圓於 F 。
證明： B, P, F 三點共線。



2. 已知正實數 x, y, z 滿足 $(x + y + z)xyz = 9$ 。
證明： $(x + y)^2 + (y + z)^2 + (z + x)^2 \geq 18$ 。
3. 若 $k = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$ ，其中 a, b, c 為實數，則稱 k 為「彰數」。
設 p, q 為彰數，證明： $p \times q$ 亦為彰數。