[1] (i) 沒有1: □□□ $2310 = 2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11$ 分 3 1 1 $C^5_3=10$；取 2 2 1 $\frac{C^5_2C^3_2}{2!}=15$ (ii) 有1: □□1 4 1 $C^5_4=5$；3 2 $C^5_3=10$ 和=40

[2] $a_n=S_n-S_{n-1}=(\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}})(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})$ $\Rightarrow \sqrt{S_n}=\sqrt{S_{n-1}}+1$ $b_n=b_{n-1}+1=b_1+(n-1)=n$ $\Rightarrow S_n=n^2$

# 臺北市立大直高級中學 113 學年度第一次專任教師甄選 數學 科甄試試題

$20^2-19^2+18^2=400-37=363$

[3] $a_n=n(n+1)(n+2)$ $\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right)$ $\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\right)-\left(\frac{1}{2\cdot3}+\cdots\right)\right]=\frac{1}{4}$

2024.4.24(三)

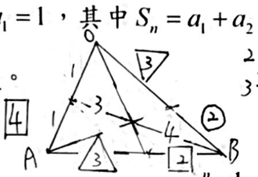
## 一、填充題（48 分）

school

1. 已知 $a,b,c$ 為相異之正整數，且滿足 $abc=2310$，則集合 $\{a,b,c\}$ 共有 40 種可能。

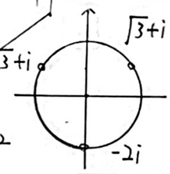
Ru

2. 若有一正數數列 $\langle a_n\rangle$ 滿足 $a_1=1$，其中 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，且 $\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=a_n\ (n\ge2)$，求 $S_{20}-S_{19}+S_{18}=$ 363 。



$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{4}=1$ $\frac{1}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}=1$ $1-\left(\frac{2}{5}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{6}{25}$

3. 若 $a_n=\begin{vmatrix} n & n+1 & 0\\ n+2 & n+1 & n+2\\ n+2 & 0 & n+2\end{vmatrix}$，$\forall n\in\mathbb{N}$，則 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=$ $\frac{1}{4}$ 。



$|\sqrt3+i|+|-\sqrt3+i|+|-2i|=\sqrt3+1+\sqrt3-1+2=2\sqrt3+2$

[5] $z=\left(8\left(e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+2k\pi\right)}\right)\right)^{\frac{1}{3}}$, $k=0,1,2$

4. 在$\triangle OAB$ 中，$C$ 為 $\overline{OA}$ 的中點，$D$ 在 $\overline{BC}$ 上且 $\overline{BD}:\overline{DC}=4:3$。現延長 $\overline{OD}$ 交 $\overline{AB}$ 於 $E$，延長 $\overline{AD}$ 交 $\overline{OB}$ 於 $F$，若$\triangle CEF$ 面積為 $m$，$\triangle OAB$ 面積為 $M$，則 $\frac{m}{M}$ 為 $\frac{6}{25}$ 。

孟氏 正弦 師氏

5. 若 $a_1,a_2,a_3,b_1,b_2,b_3\in\mathbb{R}$，且 $(a_k+b_ki)^3=-8i$，其中 $k=1,2,3$，則 $\sum\limits_{k=1}^{3}|a_k+b_k|=$ $2+2\sqrt3$ 。

6. 若 $ABCD$ 為一給定的矩形，長 $\overline{AB}=20$、寬 $\overline{BC}=5$。若過 $A$ 點作一直線交 $\overline{CD}$ 於 $P$，且與 $\overline{BC}$ 邊的延長線交於 $Q$，則當 $\overline{CP}$ 長度為 $20-\sqrt{200}$ 時，$\triangle ADP$ 與$\triangle CPQ$ 之面積和為最小。

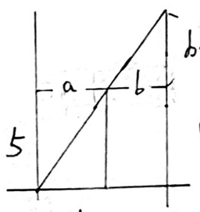
[7]

7. 設橢圓 $\Gamma$ 之方程式為 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$，兩焦點為 $F_1(0,c)$ 及 $F_2(0,-c)$，其中 $c>0$。設 $R$ 為 $\Gamma$ 內部而被兩正焦弦所夾之區域。將 $R$ 繞 $\Gamma$ 的長軸旋轉一周，而形成一酒桶狀立體區域 $V$，則體積 $V$ 之值為 $1416\pi/25$ 。

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $\Rightarrow y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$ $V=2\int_0^c \pi y^2\,dx$ $\left(x-\frac{1}{a^2}\cdot\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^c=c\left(1-\frac{c^2}{3a^2}\right)$ $\Rightarrow V=2\pi b^2c\left(1-\frac{c^2}{3a^2}\right)=\pi\cdot2\cdot9\cdot4\cdot\frac{59}{3\cdot25}=\frac{1416\pi}{25}$ (75−16)

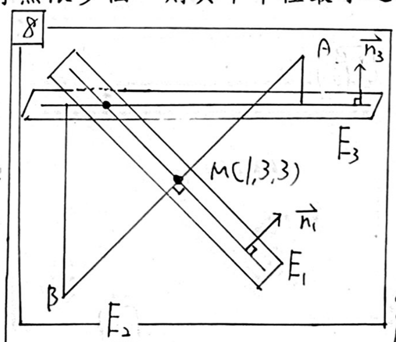
8. 空間中有 $A(-1,3,2)$，$B(3,3,4)$ 兩點，過 $A$、$B$ 兩點且球心在平面 $E:5x-2y+5z-5=0$ 上之球面有無限多個，則其中半徑最小之球面 $S$ 的方程式為 $(x-2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=14$

[6]



$a+b=20$ $b=20-a$ $A=\frac{5}{2}\left(a+b\cdot\frac{b}{a}\right)$ $\Rightarrow a+\frac{a^2-40a+400}{a}=2a+\frac{400}{a}-40$ $2a=\frac{400}{a}\Rightarrow a=\sqrt{200}$ $b=20-\sqrt{200}$

[8]



$\vec{n_1}\parallel(2,0,1)$

$\vec{n_1}$: 2 0 1 2 0 1; $\vec{n_3}$: 5 −2 5 5 −2 5 → 2 −5 −4

$E_1: 2x+z=5\quad(z=-2x+5)$
$E_2: 2x-5y-4z=-25$
$E_3: 5x-2y+5z=5$

$10x-5y=-5$ $(2x-y=-1)$ $-5x-2y=-20$ $\Rightarrow x=2,\ y=5,\ z=1$ $r^2=9+4+1=14$ $\Rightarrow (x-2)^2+(y-5)^2+(z-1)^2=14$