[3] $\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix}$ $\lambda=1$: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\lambda=2$: $\begin{bmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\begin{array}{c|cccc} 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}$ $\Rightarrow P^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{|P|}$

$= -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)+2(2-\lambda)$ $\Rightarrow$ 令 $P=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $|P|=-1+2=1$ $A^n=PD^nP^{-1}$

$= -(\lambda-2)(\lambda^2-3\lambda+2)$

113 年國立鳳山高級中學教師甄選初試筆試試題【數學科】

$=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{bmatrix}P^{-1}$

一、 填充題　配分：每題 6 分，共 72 分。全對才給分。 答題：請標註題號並依題序作答，切勿跳題回答。

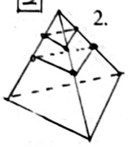
$= -(\lambda-1)(\lambda-2)^2$

$=\begin{bmatrix} 2 & 2^n & 0 \\ -1 & 0 & 2^n \\ -1 & -2^n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}=\cdots$ #

1. 已知 m,n 為正整數，且 $\sqrt{m}+\sqrt{n}=\sqrt{2023}$，試求數對 (m,n) 有 16 組解。

[1] $\sqrt{2023}=17\sqrt{7}$, $17=1+16=2+15=\cdots=16+1$, 16組

[2]



2. 設四面體 $OABC$ 之體積為 20，若 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$，$x,y,z\geq 0$ 且滿足 $2\leq x+y+z\leq 4$，試求一切 P 點所形成之圖形體積為 1120

$20\cdot(4^3-2^3)=1120$

$\begin{cases} 3=d+b(r-1) \\ 11=d+br(r-1) \\ -13=d+br^2(r-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8=b(r-1)^2 \\ -24=br(r-1)^2 \end{cases}$ $\frac{1}{2}+5\cdot 5+\frac{1}{2}(-3)^5 = -96$

[5] $a+b=1$, $a+d+br=4$, $a+2d+br^2=15$, $a+3d+br^3=2$ $\begin{cases} r=-3, b=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{2}, d=5 \end{cases}$

[4]

3. 已知方陣 $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$，$A^2=\begin{bmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$。設 n 為正整數，試用 n 表方陣 A^n 之一般式為 $\begin{bmatrix} -2^n+2 & 0 & -2^{n+1}+2 \\ 2^n-1 & 2^n & 2^n-1 \\ 2^n-1 & 0 & 2^{n+1}-1 \end{bmatrix}$

$\left|t\left(\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right|=\frac{t}{4}\cdot 2\sqrt{3}=1 \Rightarrow t=\frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ 丙 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ #　2024.4.21(日) ~ 2024.4.23(二) 地震停班

4. 假設地球為一球體，今以地球球心為原點，地球半徑為單位長，建立一空間直角坐標系。設地球表面上甲、乙、丙三地，甲、乙兩地的座標分別為 $(1,0,0)$ 及 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，丙地為甲乙兩地球面上最短路徑之中點，試求丙地之座標為 $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

$[x]\leq x<[x]+1$　$\frac{x}{2}-1<\left[\frac{x}{2}\right]\leq\frac{x}{2}$　$\Rightarrow 7\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{3}-1\right)\cdot 6<x\cdot 6<7\left(\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+1\right)\cdot 6$

[7] $\Rightarrow x-1<[x]\leq x \Rightarrow \frac{x}{3}-1<\left[\frac{x}{3}\right]\leq\frac{x}{3} \Rightarrow -\frac{x}{3}\leq-\left[\frac{x}{3}\right]<-\left(\frac{x}{3}-1\right) \Rightarrow -42<x<42$

x	$\left[\frac{x}{2}\right]-\left[\frac{x}{3}\right]$	
$7\cdot5=35$	$17-11=6$	×
$7\cdot4=28$	$14-9=5$	×
$7\cdot3=21$	$10-7=3$	✓
$7\cdot2=14$	$7-4=3$	×
$7\cdot1=7$	$3-2=1$	✓
$7\cdot0=0$	$0-0=0$	✓
$7(-1)=-7$	$-4-(-3)=-1$	✓
$7(-2)=-14$	$-7-(-5)=-2$	✓
$7(-3)=-21$	$-11-(-7)=-4$	×
$7(-4)=-28$	$-14-(-10)=-4$	✓

5. 設 $a_1,a_2,a_3,\ldots$ 為一個等差數列，$b_1,b_2,b_3,\ldots$ 為一個等比數列。

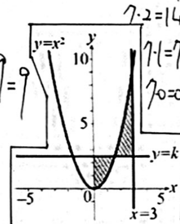
$21+7+0+(-7)+(-14)+(-28)=-21$

對於每一個正整數 n，設 $c_n=a_n+b_n$，組成數列 $c_1,c_2,c_3,\ldots$。如果 $c_1=1$，$c_2=4$，$c_3=15$，$c_4=2$，試求 $c_6=$ -96

$\int_0^{\sqrt{k}}(k-x^2)dx+\int_{\sqrt{k}}^3(x^2-k)dx$　微分 $\Rightarrow 2k^{\frac{1}{2}}-3=0$　$\alpha+\beta=$

[6] 令 $G(x)=kx-\frac{x^3}{3}$, $2G(\sqrt{k})-G(3)=\frac{4}{3}k^{\frac{3}{2}}-3k+9 \Rightarrow k=\frac{9}{4}$　$\frac{9}{4}+\frac{4}{3}\cdot\frac{9}{4}\cdot\frac{3}{2}-3\cdot\frac{9}{4}+9=9$

6. 設 Γ 為二次函數 $y=x^2$ 與直線 $x=0$、$x=3$、$y=k$ $(0<k<9)$ 在第一象限所圍的封閉區域（附圖中的斜線區域），當 $k=\alpha$ 時，Γ 的面積最小為 β，試問 $\alpha+\beta=$ 9



[9] $\Delta=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix}\overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{BC}\end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\left|\begin{matrix} 2 & -6 \\ -16 & 8 \end{matrix}\right|$

$=40$

7. 試求滿足方程式 $\left[\frac{x}{2}\right]-\left[\frac{x}{3}\right]=\frac{x}{7}$ 之所有實數解的和= -21

$G\left(\frac{-14}{3},\frac{26}{3}\right)$　$V=2\pi\cdot\frac{26}{3}\cdot 40$

$=\frac{2080\pi}{3}$

8. 在複數平面上，z，$\frac{1}{z}$，$z+\frac{1}{z}$ 與原點 O 圍成一平行四邊形，此平行四邊形面積為 $\frac{37}{35}$。

pappus thm

已知 z 的實部是正數，若 $\left|z+\frac{1}{z}\right|$ 的最小值為 d。試求 $d^2=$ 送分。

9. 坐標平面上，$A(2,2)$, $B(0,8)$, $C(-16,16)$ 所形成的 ΔABC 繞著 x 軸旋轉一圈所得的旋轉體體積為何? $\frac{2080}{3}\pi$。

10. 某餐飲公司老闆正在安排一個六天春節期間的開店營業狀況，若此六天中，老闆每天都能自由考慮選擇開店營業或休息與否，但老闆訂定一個原則: 只要沒有連續三日以上都不開店營業就好。例如: 此六天(營,休,營,休,營,休)表示符合老闆原則的一種開店方法，但(營,休,休,休,營,休)未符合老闆原則。試問在滿足老闆原則下，此六天的開店方法數有幾種? 44。

[10]

AAA BBB → 4
AAA BBA → 3·2=6　12
AAA B AA → 2

AAAA BB → 3
AAAA BA → 2　5
AAAAA B → 2
AAAAAA → 1

$2^6-20=44$

背面尚有試題

11 至少1個數≤1 且 至少2個數≤2 且 至少3個數≤3 ←必然
A' ∩ B'

$A \equiv$ 4個數皆>1 (只能選2 or 3)
$B \equiv$ 1個數≤2 　0/2 3 3 3

11. 直線$y=\sqrt{3}x$上有一點 A，x 軸上有一點 B，圓$(x-12)^2+(y-5)^2=4$上有一點 C。求ΔABC之最小周長為 $11\sqrt{3}$ 。

$n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)$ $=256-24$
$=4^4-(2^4+3\cdot4+1-(4+1))=232$

0個數≤2 　3 3 3 3
$A\cap B$ 　2333 3233 3323 3332 　3333

12. 由0,1,2,3(可重複)所組成長度為 4 的數字字串滿足：$\boxed{\text{對於每一個小於 4 的正整數 } j\ (j=1,2,3)\text{，數字字串中的數字}}$ $\boxed{\text{至少有 } j \text{ 個數字不超過 } j}$ (例如: 2113 是一個滿足條件的數字字串。但 0333 不是符合要求的數字字串。)，試問有 232 個符合的數字字串。

二、計算證明題　答題：請標註題號並依題序作答，切勿跳題回答，並完整說明。

1. (8 分)試求$\begin{vmatrix}\tan 40° & \tan 10° & \tan 50°\\ \tan 20° & \tan 50° & \tan 70°\\ \tan 10° & \tan 70° & \tan 80°\end{vmatrix}$之值。

math101 P.202 95溪湖 101雄中

法1: $\tan 50° \cdot \tan 40° = 1$

$\Rightarrow \tan 10° = \dfrac{\tan 50° - \tan 40°}{1+1}$ 　$50°-40°$

$\begin{vmatrix}\tan 40° & \dfrac{\tan 50°-\tan 40°}{2} & \tan 50°\\ \tan 20° & \dfrac{\tan 70°-\tan 20°}{2} & \tan 70°\\ \tan 10° & \dfrac{\tan 80°-\tan 10°}{2} & \tan 80°\end{vmatrix}=0$

2

2. (10 分)設x、y、z皆為實數，$x^3+y^4=z^5$，若$x=2^{20n+8}$，$z=2^{12n+5}$，試求$6\log_2 x-32\log_2 y+30\log_2 z$的值。

$y^4=2^{60n+25}-2^{60n+24}=2^{60n+24}$

$n(20\times6-\frac{32\times60}{4}+30\times12)+48-32\cdot6+30\cdot5=6$

3. (10 分)$f(x)=\sqrt{x-27}+\sqrt{40-x}+\sqrt{x}$，其中 $27<x<40$，試求$f(x)$最大值為何？ 108中科實中

3 法1: thepiano
$(a(x-27)+b(40-x)+cx)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\ge(\sqrt{x-27}+\sqrt{40-x}+\sqrt{x})^2$

$a+c=2b$, "=" 成立：$a^2(x-27)=b^2(40-x)=c^2x$

$27<x<40$, 猜 $x=36$ 　$x-27$, $40-x$, x 皆為完全平方數

$\Rightarrow 3a=2b=6c \Rightarrow a:b:c=\frac{1}{3}:\frac{1}{2}:\frac{1}{6}=2:3:1$

$\Rightarrow (-54+120)(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1)=66\cdot\frac{11}{6}=121 \Rightarrow max=11$

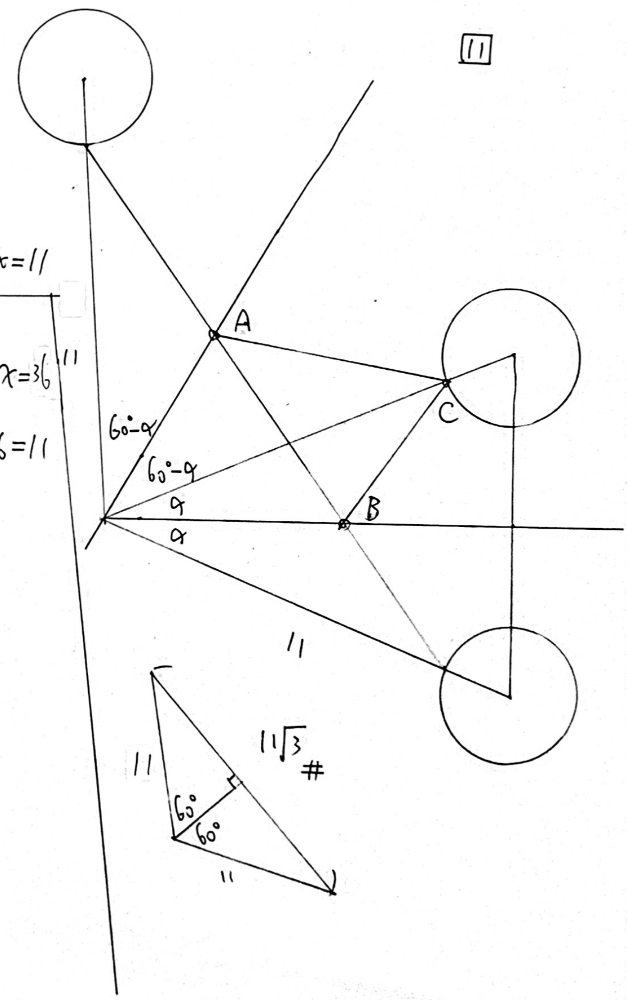
3 法2: 　數感好高

朱氏幸福

$f'(x)=0 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x-27}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{40-x}} \Rightarrow \frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2} \Rightarrow x=36$

$f(36)=3+2+6=11$

11



Created with Scanner Pro