

# 國立嘉科實驗高級中學

## 113學年度高中部教師甄選

### 數學科 試題

#### 作答注意事項

1. 本試題共兩部分：測驗題及非選擇題，共計 100 分。
2. 選擇題請用 2B 軟心鉛筆在答案卡劃記，非選擇題限用藍色、黑色原子筆或鋼筆在答案本上作答，但繪圖時得使用黑色鉛筆。
3. 本科不可以使用電子計算器。



一、填充題（每題 7 分，共 56 分）

1.  $\sum_{k=1}^{555}(k^k)$  的個位數字為 6。
2. 將 2,3,3,5,5,5 排成六位數，共有 60 種不同的排法，則這 60 個數的平均數為 425925.5。
3. 在坐標平面上有一  $\triangle ABC$ ，設  $A(5, 3)$ 、 $L_1: x+3y=-1$  為  $\angle B$  的角平分線、 $L_2: x-7y=23$  是  $C$  點對直線  $\overleftrightarrow{AB}$  所作的垂直直線，若直線  $\overleftrightarrow{BC}$  的方程式為  $ax+by=1$ ，則數對  $(a, b) = (\frac{1}{8}, -\frac{1}{8})$ 。
4. 電影星際大戰(Star Wars)中，帝國軍的兩架鈦戰機在空間坐標系中，各自沿直線  $L_1: \frac{x}{2} = \frac{y}{2} = z-2$ 、 $L_2: x+4=3-y=-z$  飛行，反抗軍在點  $(3, 2, 1)$  處發射一束雷射砲恰好擊落了此兩架鈦戰機，假設雷射砲的彈道為直線  $L: \frac{x-3}{a} = \frac{y-2}{b} = z-1$ ，試問數對  $(a, b) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 。
5. 空間中，平面  $y-z=1$  交球面  $x^2+y^2+z^2=4$  於一圓，則此圓投影在  $xy$  平面上的封閉圖形面積為  $\frac{7\sqrt{2}\pi}{4}$ 。
6. 設多項式函數  $f(x)$  滿足  $\deg(f(x)) = 2024$ ，且對於  $k = 1, 2, 3, \dots, 2025$ ，恆有  $f(k) = \frac{2}{k}$ ，則  $f(2026)$  之值為  $\frac{2}{1013}$ 。
7. 在坐標平面上，若  $\Gamma: \frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$ 、 $A(9, 0)$ 、 $B(7, 7)$ ，且動點  $P$  在  $\Gamma$  上，試求： $5\overline{PA} + 3\overline{PB}$  的最小值為 54。
8. 在坐標平面上，設直線  $L_1: 2x+5y+6=0$ 、 $L_2: 4x+7y-12=0$ 。已知二階方陣  $A$  可將  $L_1$  變換到  $L_2$ ，亦可將  $L_2$  變換到  $L_1$ ，試求矩陣  $A = \begin{bmatrix} -1 & -\frac{17}{4} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

二、計算證明題（共 23 分）

1.  $\triangle ABC$  中， $\overline{AB} = 5$ 、 $\overline{BC} = 6$ 、 $\overline{CA} = 7$ ， $P$  為邊上或內部一點，請回答下列問題：

(1) 求  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$  的最小值，寫出此時  $P$  點所在的位置，並證明之。

(6 分)

(2) 求  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2$  的最大值，寫出此時  $P$  點所在的位置，並證明之。

(5 分)

(3) 若將三角形推廣到任意凸四邊形  $ABCD$ ，請分別寫出當  $\overline{PA}^2 + \overline{PB}^2 + \overline{PC}^2 + \overline{PD}^2$  發生最大值與最小值時， $P$  點所在的位置（不需證明）。（4 分）

2. 已知  $x, y, z, w$  為正實數且滿足  $x+y+z+w=1$ ，

試證明  $\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} + \frac{w}{1+w} \leq \frac{4}{5}$ 。（8 分）

### 三、申論題（共 21 分）

1. 請依序回答以下 2 個題目：

- (1) 請就「數列  $\langle \frac{1}{2^n} \rangle$ 」說明學生在數列極限的學習上，會出現的迷思概念或錯誤類型。(4 分)
- (2) 請就「無窮級數  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$ 」說明學生在無窮級數的學習上，會出現的迷思概念或錯誤類型。(4 分)

2. 你是一位高一數學老師，開學兩個月後，班上有一位動機及能力皆出色的學生來找你，希望你能利用課餘指導他參加競賽或進行專題研究。請從「奧林匹亞競賽」、「學科能力競賽」、「全國中小學科展」、「臺灣國際科展」四個活動中擇一，並回答下列問題：

- (1) 以文字或圖示說明此活動的期程或階段，請寫出簡要內容及約略日期。  
(4 分)
- (2) 承上，假設你指導學生參加此活動，你會如何規畫？（請簡要寫出執行方案，例如進行培訓或討論的頻率、內容，教材來源及運用方式等）  
(5 分)
- (3) 就你的看法，指導學生參加此活動的過程中，可能遇到哪些困難或挑戰？你如何指導學生克服？(4 分)