111 年度高級中等學校科學班聯合學科資格考試數學科試題卷

第壹部分：單選題、多選題及填充題，共 50 分。

一、單一選擇題：(共二題，每題5分，共10分)

說明：第1題至第2題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請填至答案卷之指定欄位。各題答對者，得5分；答錯、未作答或書寫多於一個選項者，該題以零分計算。

1、坐標平面上，已知直線 $L_1: x-y+1=0$ 經由矩陣 $T=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ 會變換成直線 $L_2: 2x-y+\dfrac{\sqrt{10}}{2}=0$，則 $\tan^2\theta=$？

(1) $\frac{1}{3}$　(2) $\frac{1}{4}$　(3) $\frac{1}{6}$　(4) $\frac{1}{8}$　(5) $\frac{1}{9}$。

2、若三次函數 $f(x)=a(x-a)^2(x-b)$ 在 $x=a$ 時有相對極大值(或局部極大值)，則下列哪一個選項是**正確**的？

(1) $a<b$　(2) $a>b$　(3) $ab<0$　(4) $ab>a^2$　(5) $ab>b^2$。

二、多重選擇題：(共三題，每題5分，共15分)

說明：第 3 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，選出正確選項，請填至答案卷之指定欄位。每題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；所有選項均未作答或答錯多於 2 個選項者，該題以零分計算。

1. 已知兩函數 $f(x)=\dfrac{x^3}{|x|}$，$g(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，有關下列函數在定義域為 $\{x\in R\,|\,x\neq 0\}$ 的敘述哪些是**正確**的？
   (1) $f(x)$ 為奇函數
   (2) $f(x)\times g(x)$ 為偶函數
   (3) $(g\circ f)(x)$ 為奇函數
   (4) $g(x)$ 的導函數為奇函數
   (5) $f(x)$ 的反函數為偶函數。

2. 高一科學班 30 位同學的一次數學平時考試，試題有 20 題，全為 5 選 1 的單選題。林老師想要了解同學"內心的想法"，採用了 X、Y 兩種計分方法：若某同學有 R 題答對，W 題答錯，N 題放棄沒答，則 $X=5R-W$，$Y=5R+N$，請問下列選項哪些是**正確**的？
   (1) 同一位同學的 X 計分不可能大於 Y 計分
   (2) 全班 X 計分的算術平均數不可能大於 Y 計分的算術平均數
   (3) 任兩位同學的 X 計分的差之絕對值不可能大於 Y 計分的差之絕對值
   (4) 用 X 計分將全班排名次的結果與用 Y 計分排名次是完全相同
   (5) 兩種分數是完全正相關。

3. 已知三次實係數多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d=a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$ 有**局部**極大值 $f(s)$、**局部**極小值 $f(t)$，其中 $a>0$，$\alpha<\beta<\gamma$，試選出下列哪些是**正確**的選項？

(1) 若 $\int_s^t f(x)dx=0$，則 $\beta=-\dfrac{b}{3a}$

(2) 若 $\int_s^t f(x)dx<0$，則 $\int_\alpha^\gamma f(x)dx<0$

(3) $\int_\alpha^s f(x)\,dx=\int_s^\beta f(x)\,dx$

(4) 若 $f''(\beta)>0$，則 $s+t>2\beta$

(5) 若 $f''(\beta)=0$，則 $\int_\alpha^\beta \left(f(x)\right)^2 dx=\int_\beta^\gamma \left(f(x)\right)^2 dx$。

三、填充題：**(**共 5 題，共 25 分**)**

說明：第A 題至第E 題為填充題，將答案填至答案卷之指定欄位，每一題完全答對得5 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

A、在坐標平面上，已知函數 $y=\log x$ 與直線 $x=\dfrac{3a+1}{5-a}$ 圖形的交點在第一象限，試求實數 a 的範圍為________。

B. 已知正六角錐 A-$BCDEFG$ 中，底面 $BCDEFG$ 為正六邊形，六個側面皆為腰長 $\sqrt{5}$ 的等腰三角形。**若**此正六邊形中，其中三個頂點坐標分別為 $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(3,2,1)$，則此角錐之頂點 A **所有可能**的座標為____________。

C. 設大名位在坐標平面原點 O 上，面向 $(0,1)$，他想要到達目標 $(1,1)$，但他每一步只能移動一個單位，移動方式可選擇往前走一步或向右轉 90 度(順時針)後前進一步(即他每一步都不會向左轉)。若大名被限制在 $0\le x\le 16,\ 0\le y\le 16$ 的範圍內活動，且他走過的點不允許重複，**則**大名由 $(0,0)$ 到達 $(1,1)$ 時所走**不同路徑**的方法數為_______。(步數不論多或少皆可)

D. 已知 $O(0,0)$，$A(4,2)$，$B(-1,2)$，兩個點集合 $\Omega_1=\left\{P\middle|\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}\le 0\right\}$，$\Omega_2=\left\{Q\middle|\overrightarrow{OQ}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}, p\le x\le q, \alpha\le y\le\beta\right\}$，其中 p、q、α、β 皆為實數。若 $\Omega_1\subseteq\Omega_2$，則 β 的**最小**可能值為________。

E. 袋中有 3 紅球 4 白球，從袋中每次取出一顆球，**取後不放回**，且每次取球時各球被取中的機率均相等。若任一色球取完即停止取球，則取球次數的期望值為________。

第貳部分：非選擇題（數學寫作能力、計算證明題，共50分）

說明：本部份共有兩題數學寫作能力及五題計算證明題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明題號**(1、2)** 與子題號**((1)、(2)、(3))**，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每題配分標於題末。

四、數學寫作能力：**(**共二題，共計**12**分**)**

1. 敘述空間中的三垂線定理並證明之。（證明過程中需詳述每一步驟成立的原因） **(6** 分**)**

2. 敘述坐標平面上點到直線的距離公式，並證明之。**(6** 分**)**

五、計算與證明題：**(**共五題，共計 **38** 分**)**

1. 有一款遊戲不定期推出促銷抽獎活動，在促銷時段遊戲公司宣稱玩家抽中大獎的機率是 10%。設隨機變數 X 為連續抽獎直到抽中大獎才停止所需抽獎次數，小丁在促銷時段抽獎，直到第 20 次時才抽中大獎並停止抽獎，請以顯著水準 α=0.1 計算抽獎次數 X 的**拒絕域**為何？並判斷小丁可否據此拒絕承認“遊戲公司宣稱的大獎機率是 10%”的假設？(7 分)

2. 設 F_1 與 F_2 為坐標平面上雙曲線 Γ：$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的兩個焦點，P 為 Γ 上一點，請考慮 F_1 、F_2 與 P 三點的位置回答下列問題：(7 分)

(1) 以 P 、F_1 、F_2 三點為頂點是否能形成直角三角形 ΔPF_1F_2？如果可以請寫出所有 ΔPF_1F_2 周長的可能值，如果不行請說明原因。

(2) 以 P 、F_1 、F_2 三點為頂點是否能形成正三角形 ΔPF_1F_2？如果可以請寫出所有 ΔPF_1F_2 周長的可能值，如果不行請說明原因。

(3) 以 P 、F_1 、F_2 三點為頂點是否能形成等腰三角形 ΔPF_1F_2？如果可以請寫出所有 ΔPF_1F_2 周長的可能值，如果不行請說明原因。

3. 設 $\triangle ABC$ 中，$\angle A, \angle B$ 與 $\angle C$ 的對邊分別為 a, b, c，且 $a=4$、$c=\sqrt{13}$。若 $\sqrt{3}\cos(A+B)+\sin 2C=0$，則 $\triangle ABC$ 的面積為何？(8 分)

4. 若方程式 $z^6=4-4\sqrt{3}i$ 的六個根分別為 z_0,z_1,z_2,z_3,z_4,z_5。今將六個根描繪在複數平面上，依序相連得出凸六邊形。

(1) 求 $|z_0-z_1|^2+|z_0-z_2|^2+|z_0-z_3|^2+|z_0-z_4|^2+|z_0-z_5|^2$ 之值。(4 分)

(2) 若存在直線 $L: y=mx$ 使得直線 L 為此六邊形的對稱軸，求斜率 m 的最大與最小值分別為何？ (4 分)

5. 科科做射擊練習，若他這次打靶命中，則下一次再命中的機率為 0.5；若這次打靶不命中，則下一次再命中的機率為 0.25。設科科第 n 回打靶命中的機率為 P_n，其中 n 為自然數，已知第一回科科打靶命中，請問：

(1) 數列 $\langle P_n \rangle$ 的遞迴關係式。(2 分)

(2) 將(1)的結果改寫成 $(P_n+\alpha)=\beta(P_{n-1}+\alpha)$ 的形式，其中 $n\geq 2$，α,β 為常數。(2 分)

(3) 由(2)的結果，試求數列 $\langle P_n \rangle$ 的一般項以及 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$。(4 分)