探討一道旋轉體體積的命題、解題與成題

陳昭地
國立臺灣師範大學 數學系

壹、前言

本文旨於仿波利亞怎樣解題的模式來命題。探討對一道原先設想成簡易具創意的旋轉體體積求解，誤踏陷阱，導入誤解轉向正解的過程，有如波利亞解題流程一樣。以至於判斷正誤解導入簡便求解的旋轉體利器 Pappus 定理來確定正解，進而推廣到更一般的試題〔成題〕，引用這個實際經歷，確認西元 300 年就提出的 Pappus 定理是解旋轉體體積絕佳必備的關鍵工具，因此提出國內高三微積分無論是課綱、教科書或補充教材都應將 Pappus 定理的應用列入定積分的應用~求旋轉體體積內容列入，最後再提出四道相關的成題，充作定積分求旋轉體體積教學的參考。

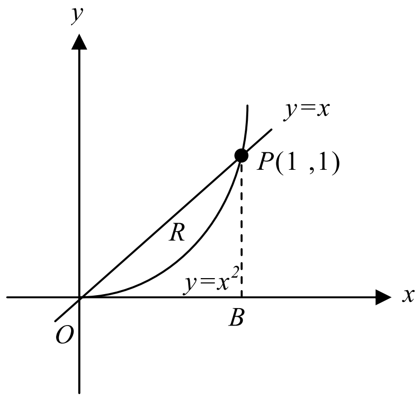
又到年底學期快結束了，正為上學期師大大一物理系的微積分期末考命題傷腦筋的時候，有關用定積分求旋轉體體積的問題，諸如圓盤法〔橡皮圈法〕、圓柱殼法〔中學數學課綱不包含此法〕，總是要出幾道合理簡易的旋轉體來評量學生。於是想到教過的幾道旋轉體，諸如：

> 設 R 為平面上拋物線 $y=x^2$ 與直線 $y=x$ 為界所圍成的區域，並設 R 繞 x 軸（或 y 軸）一圈所得的旋轉體為 V，試求 V 的體積。

此時，用圓盤法〔橡皮圈法〕極易求得 V 的體積：

$$\pi\int_0^1\left[(x)^2-(x^2)^2\right]dx=\pi\int_0^1(x^2-x^4)\,dx$$

$$=\pi\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)=\frac{2\pi}{15}$$



旋轉軸為 y 軸時，先將 $y=x^2$ 改為 $x=\sqrt{y}$ $0\le y\le 1$，同法可得：

$$\pi\int_0^1\left[\left(\sqrt{y}\right)^2-(y)^2\right]dy$$

$$=\pi\int_0^1\left(y-y^2\right)dy$$

$$=\frac{\pi}{6}$$

當然以 y 軸為旋轉軸時，用圓柱殼法來求會比較便捷些：

$$2\pi\int_0^1 x(x-x^2)dx$$

$$=2\pi\int_0^1 (x^2-x^3)dx$$

$$=\frac{\pi}{6}$$

上面的兩問題簡潔易懂，解法也同樣淺顯，連高三選修數學的學生兩三分鐘能順利完成，總是不好直接命這樣顯得太簡易不具任何挑戰的問題。於是我想稍微改變一下下，但計算過程要具有創造力不可太複雜，把題目改成旋轉軸是直線 $y=x$ 本身，這個旋轉體就有一點像橄欖球比較親切些吧！希望高中生也是可作的問題，但試作的結果，一不小心，誤踩地雷，想當然爾地仿照圓盤法，也是兩三分鐘得形式不錯的答案 $\frac{\pi}{60}$ ，可是放下筆來，覺得不太對勁，心裡毛毛的，題目不應該這麼容易，結果只好再檢驗求旋轉體之基本過程，思索了好久，盯住旋轉軸 $\overleftrightarrow{OP}$ ，其 $\overline{OP}$ 長度為 $\sqrt{2}$ ，應該是變數的範圍 t 的上限，繼續做下去，發現解法過程較具挑戰性，不再那麼容易，變成至少需花上一、二十分鐘；即使是正確的解法，也不太適用作考題（這裏的解法連思考時間，可能需花上半小時），於是我終於攤出波利亞解題模式：瞭解問題 ↔ 擬定計畫 ↔ 執行計畫 ↔ 核驗解答來處理，以下我就把利用波氏的解題流程搬出來！

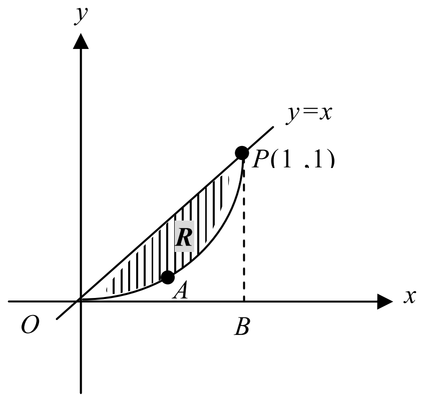
貳、誤解

重述題目一遍：

設 R 為拋物線 $y=x^2$ 與直線 $y=x$ 為界所圍成的平面區域，並設 R 繞直線 $y=x$ 旋轉一圈所得的旋轉為 V，試求 V 的體積。

很自然地，拿到問題，先畫一個示意圖：

1. 在拋物線 $y=x^2$ ，於 $0\le x\le 1$ 的部分上任取一點 $A(x,x^2)$ 。



2. 求 $A(x,x^2)$ 到旋轉軸 $y=x$ 的距離：

$$\frac{|y-x|}{\sqrt{2}}=\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}$$ 。

3. 用圓盤法求 V 的體積得

$$\pi\int_0^1\left(\frac{x-x^2}{\sqrt{2}}\right)^2dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1(x^2-2x^3+x^4)dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{2}+\frac{x^5}{5}\right]_0^1=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)$$

$$=\frac{\pi}{60}$$

如此，得 V 的體積為 $\dfrac{\pi}{60}$ 。

放下筆來，想一想是不是解法答案都是正確嗎？但它是很多學生自然的作法，也許，有些學生會換一個角度來檢驗解法是否正確，此時可把區域 R 換成拋物線 $x=y^2(y=\sqrt{x})$ 與直線 $y=x$ 為界的區域 R'，其它條件不變下，V 的體積依上法就應為

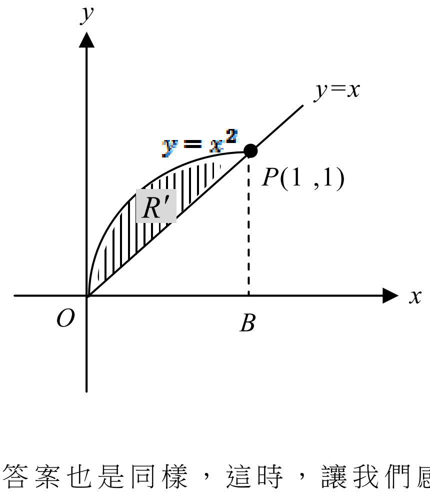
$$\pi\int_0^1\left(\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}\right)^2 dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^1(x-2x^{\frac{3}{2}}+x^2)\,dx$$

$$=\frac{\pi}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{4}{5}+\frac{1}{3}\right)$$

$$=\frac{\pi}{60}$$



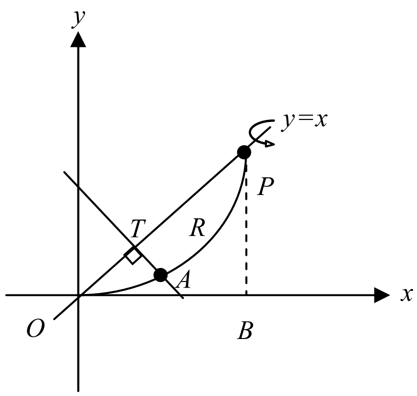
答案也是同樣，這時，讓我們感覺原來上面的兩塊區域對直線 $y=x$ 成對稱，繞 $y=x$ 直線旋轉一圈，它們的旋轉體必然也都是同樣大小全等立體！

雖然經過這樣的檢驗表示這可能是正確的解法！不可馬上寫下答案就結束了！還須換一換角度想一想，例如：定積分的範圍取成區間 $[0,1]$，旋轉半徑跟 x 軸不互相垂直，覺得有點不對勁！依定積分的取法，理應取成 $\overline{OP}$ 長的區間 $[0,\sqrt{2}]$ 而且旋轉半徑正好跟 $\overline{OP}$ 垂直，換言之，定積分的上限應該是 $\sqrt{2}$ 而不是 1，這裏應該有問題！於是就會讓我們另起爐灶重新思考，發現問題所在，終於發現上面的解法是錯誤的解法，而且答案也是錯的！

參、正解

底下提出上段中問題的正確解法。

1. 在 $\overline{OP}$ 上任取一點 T，$\overline{OT}=t$，$0\le t\le\sqrt{2}$ 則此點對應的直線上 $y=x$ 的 (x,y) 坐標為 $T\left(\frac{t}{\sqrt{2}},\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ ：即 $T\left(\frac{\sqrt{2}t}{2},\frac{\sqrt{2}t}{2}\right)$ 。



2. 過 $T\left(\frac{t}{\sqrt{2}},\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$ 作與 $\overline{OP}$ 垂直的直線

$\overleftrightarrow{TA}: y-\frac{t}{\sqrt{2}}=-\left(x-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)$，即

$y=-x+\sqrt{2}\,t$

以 t 來表示 $\overleftrightarrow{TA}$ 與拋物線 $y=x^2$ 相交於 $A(x,x^2)$ 點的坐標：

$$\begin{cases} y=-x+\sqrt{2}\,t \\ y=x^2 \end{cases}$$

$x^2=-x+\sqrt{2}\,t$　即　$x^2+x-\sqrt{2}\,t=0$

故 $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}}{2}$（負不合），即

$$x=\frac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}}{2}$$

所以 $y=x^2=\frac{1+2\sqrt{2}\,t-\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}}{2}$ 即

$$A\left(\frac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}}{2},\ \frac{1+2\sqrt{2}\,t-\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}}{2}\right)$$

3. 求 $\overline{TA}^2$ 長

$$\overline{TA}^2=\left(\frac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2+\left(\frac{1+2\sqrt{2}\,t-\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}t\right)^2$$

$$=1+t^2+3\sqrt{2}\,t-\left(1+\sqrt{2}\,t\right)\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}$$

4. 求 V 的體積：

$$\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(1+t^2+3\sqrt{2}t-(1+\sqrt{2}t)\sqrt{1+4\sqrt{2}t}\right)dt$$

$$=\pi\left[t+\frac{t^3}{3}+3\sqrt{2}\,\frac{t^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}}-\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2}t\right)\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}\,dt$$

$$=\frac{14}{3}\sqrt{2}\pi-\pi\,(\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}\,dt+\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2}t\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}\,dt\,)$$

其中 $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}\,dt$

$$=\frac{1}{4\sqrt{2}\cdot(1+\frac{1}{2})}\left[(1+4\sqrt{2}\,t)^{3/2}\right]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=\frac{1}{6\sqrt{2}}\left[(9)^{\frac{3}{2}}-(1)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{26}{6\sqrt{2}}=\frac{13\sqrt{2}}{6}$$

而 $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,t\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}\,dt$ 則可用

$u=\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}$ 代換：

$1+4\sqrt{2}\,t=u^2$，$\sqrt{2}\,t=\frac{u^2-1}{4}$，

$4\sqrt{2}\,dt=2udu$，$t=0$，$u=1$；

$t=\sqrt{2}$，$u=3$

故得 $\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{2}\,t\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}\,dt$

$$=\int_1^3\frac{(u^2-1)}{4}u\cdot\frac{2u}{4\sqrt{2}}du$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\int_1^3(u^4-u^2)\,du$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\left[\frac{u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right]_1^3$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\left[\frac{1}{5}(243-1)-\frac{1}{3}(27-1)\right]$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{16}\left[\frac{242}{5}-\frac{26}{3}\right]=\frac{149\sqrt{2}}{60}$$

所以 V 的面積為

$$\frac{14\sqrt{2}}{3}\pi-\frac{13\sqrt{2}}{6}\pi-\frac{149\sqrt{2}}{60}\pi$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{60}$$

跟上節的方法所求的答案形式竟然那麼類似，只差「 $\sqrt{2}$ 」的倍數！

當然，我們也可透過拋物線 $x=y^2$ 與直線 $x=y$ 圍成的區域 R' 與 R 對直線 $y=x$ 成對稱，計算 $\overline{TA'}$ 的直線與 $x=y^2$ 的交點 A' 坐標：

$y-\dfrac{t}{\sqrt{2}}=-\left(x-\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ 即 $x=-y+\sqrt{2}\,t$

解 $\begin{cases}x=-y+\sqrt{2}\,t\\x=y^2\end{cases}$ 同樣可解

$$y=\frac{-1+\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}}{2},$$

$$x=\frac{1+2\sqrt{2}\,t-\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}}{2}$$

得到旋轉體 V 同樣可表示成

$$\pi\int_0^{\sqrt{2}}\overline{TA'}^2\,dt$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{2}}\left(1+t^2+3\sqrt{2}t-(1+\sqrt{2}\,t)\sqrt{1+4\sqrt{2}\,t}\right)dt$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi}{60}\ 。$$

換句話說，也得到同樣的表示式及答案！不過這裏計算積分的算式，有一個地方要用到代換法，這是歷年來國內普通高中數學的微積分課綱未正式涉及的，當然本題表面看似簡易，但實際是具有難度的，對一般未涉及代換法求定積分的學生而言，當作考題是不合適的，即使學過代換，當然對期末考答題時間有限，以計算過程有些技巧與繁雜，還是不適合當作段考試題；不過，當作習題充作挑戰題倒是挺適合；於是這一道考題被甜甜圈的問題來取代(有三種解法)。

肆、攤牌時刻

上面兩種方法所得的答案，一個是 $\dfrac{\pi}{60}$ ，另一個是 $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{60}$ ，當然一定至少有一個是錯誤，到底是哪一個呢？

首先我們應該想像到原來的問題進一步一般化如下：

> 設 R_n 為平面上單項多項式函數 $y=x^n$ 的圖形與直線 $y=x$ 為界在第一象限所圍成的區域，並設 R_n 繞直線 $y=x$ 旋轉一圈所得的旋轉體為 V_n ，試求 V_n 的體積。

按牌理這樣的 V_n 也應該可以用人腦計算出來！但如果第 2 個答案 $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{60}$ 是正確的話，即 V_2 的體積為 $\dfrac{\sqrt{2}\pi}{60}$ ，依其解法過程如法泡製，令 $\overline{OP}$ 上的任一點 T， $\overline{OT}=t$ ， $0\le t\le\sqrt{2}$ ，T 的原坐標應為 $\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ ，

過 $T\left(\dfrac{t}{\sqrt{2}},\dfrac{t}{\sqrt{2}}\right)$ 垂直於 $\overline{OP}$ 的直線方程式為

$$y-\frac{t}{\sqrt{2}}=-\left(x-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\text{ 即 }y=-x+\sqrt{2}\,t$$

再求 $y=-x+\sqrt{2}\,t$ 與 $y=x^n$ 交點坐標 A，在 $n=3$ 的時就遇到了解三次方程式：$x^3+x-\sqrt{2}\,t=0$，利用卡丹（義大利數學家，Cardano）解一般三次方程式 $x^3+px+q=0$，判別式 $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=\frac{t^2}{2}+\frac{1}{27}>0$ 其唯一解為

$$x=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}\,t}{2}+\sqrt{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}\,t}{2}-\sqrt{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{27}}}$$

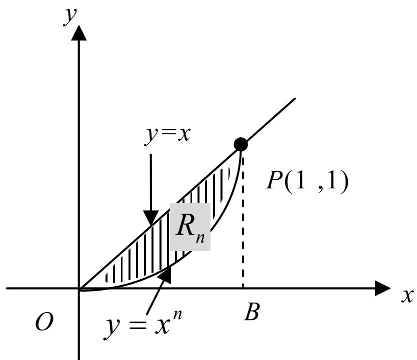
$$y=x^3=-x+\sqrt{2}\,t$$

A 坐標以 t 表示變得含有很繁雜的根式，$\overline{TA}^2$ 仍然很複雜到人腦計算 V_3 的體積是不可行，當然 $n>3$ 時更是遙不可及了！為了確定 $\frac{\sqrt{2}\pi}{60}$ 是 $V_2(=V)$ 的正確答案，必然要用適當的其他方法來檢驗，進而對一般的 V_n 能順利計算出體積來。

後來，我們想起在上微積分的課程用定積分可以求區域 R 形心的坐標，而且形心跟旋轉軸的距離 r 有如下的關係 [Pappus 定理（Pappus of Alexandria, 約在西元 300 年提出）]：

> 平面上有一區域 R，其內部與直線 l 完全分離。如果 R 的形心和 l 的距離是 r，則 R 繞 l 旋轉一圈所得的旋轉體 V 的體積有如下的關係：V 的體積等於 R 的面積乘上 $2\pi r$

這個定理中的關係恰好可以用來判定上面的兩個答案到底哪一個是正確的，於是攤牌的時刻即將來臨，看以下的解題程序：



（示意圖）

1. 先核算 R_2 的面積：其面積為 $\int_0^1 (x-x^2)\,dx=\frac{1}{6}$

2. 再求區域 R 的形心 $(\bar{x},\bar{y})$：

$$\bar{x}=\left(\int_0^1 x\,(x-x^2)\,dx\right)\div\frac{1}{6}$$

$$=6\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\right)\Bigg|_0^1=6\times\frac{1}{12}=\frac{1}{2}$$

$$\bar{y}=\int_0^1\left(\frac{x+x^2}{2}\right)\left(x-x^2\right)dx\div\frac{1}{6}$$

$$=3\int_0^1 (x^2-x^4)dx=\frac{2}{5}$$

3. 求 $(\bar{x},\ \bar{y})$ 到旋轉軸 $y=x$ 的距離：

$$\frac{\left|\bar{x}-\bar{y}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\frac{1}{10}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{20}$$

4. 由 Papus 定理計算出 $V_2(=V)$ 的體積為 $\frac{1}{6}\times 2\pi\times\frac{\sqrt{2}}{20}=\frac{\sqrt{2}\pi}{60}$

正確答案已揭曉，正是第二個解法的 $\frac{\sqrt{2}\pi}{60}$ 呢！也就是第一個解法是錯誤！不僅如此，看看解法，可不可進一步求相關問題，利用上面的方法，我們發現更可輕易得到一般解：

1. 先核算 R_n 的面積：

$$\int_0^1 (x-x^n)\,dx = \frac{n-1}{2(n+1)}$$

2. 再求區域 R_n 的形心 $(\overline{x_n}, \overline{y_n})$：

$$\overline{x_n} = \int_0^1 x(x-x^n)dx \div \frac{n-1}{2(n+1)}$$

$$= \frac{2(n+1)}{n-1}\int_0^1 (x^2 - x^{n+1})\,dx$$

$$= \frac{2(n+1)}{n-1}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^1$$

$$= \frac{2(n+1)}{n-1} \times \frac{n-1}{3(n+2)} = \frac{2(n+1)}{3(n+2)}$$

$$\overline{y_n} = \int_0^1 \left(\frac{x+x^n}{2}\right)(x-x^n)\,dx \div \frac{n-1}{2(n+1)}$$

$$= \frac{n+1}{n-1}\int_0^1 (x^2 - x^{2n})\,dx$$

$$= \frac{n+1}{n-1}\left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{n+1}{n-1}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{2(n+1)}{3(2n+1)}$$

3. 求形心 $(\overline{x_n}, \overline{y_n})$ 到旋轉軸 $y = x$ 的距離：

$$\frac{\left|\overline{x_n} - \overline{y_n}\right|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\frac{n+1}{n+2} - \frac{n+1}{2n+1}}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(n^2-1)}{3(n+2)(2n+1)}$$

4. 最後利用 Pappus 定理求出 V_n 的體積：V_n 的體積為

$$\frac{n-1}{2(n+1)} \times 2\pi \frac{\sqrt{2}(n^2-1)}{3(n+2)(2n+1)}$$

$$= \frac{\sqrt{2}(n-1)^2\pi}{3(n+2)(2n+1)}$$

（求 V_n 的體積公式）

特殊情形 $n=2$，$V_n(=V)$ 的體積為 $\frac{\sqrt{2}\pi}{60}$，可肯定 V_n 的面積一般公式無誤！且由上面的解法其一般結果也都出現「$\sqrt{2}$」倍，回頭檢驗這 $\sqrt{2}$ 倍對原先第一個誤解，當 $n=3$ 時，答案為何？

$$V_3 = \pi\int_0^1 \left(\frac{x-x^3}{\sqrt{2}}\right)^2 dx = \frac{4\pi}{105}$$

而正確答案 V_3 則為 $\frac{4\sqrt{2}\pi}{105}$，也恰好出現這 $\sqrt{2}$ 倍的關係，於是

$$V_n = \left(\pi\int_0^1 \left(\frac{x-x^n}{\sqrt{2}}\right)^2 dx\right)\sqrt{2}$$

$$= \pi\int_0^1 \left(\frac{x-x^n}{\sqrt{2}}\right)^2 \sqrt{2}dx$$

$$= \frac{\sqrt{2}(n-1)^2\pi}{3(n+2)(2n+1)}$$

換言之，誤解過程中將「dx」改為「$\sqrt{2}dx$」其餘不變，就變成正解了！原來這個 $\sqrt{2}$ 倍跟 x 轉旋轉 45°再伸長 $\sqrt{2}$ 倍有關，這樣解法是很直觀的。不過當旋轉軸

改為跟 R_n 內部不相交的直線 $y=2x$，$y=3x$ 或 $y=5x$ 等等，就得再借用 Pappus 定理了！綜合來說，Pappus 定理還是解這類問題的絕佳利器，於是綜合上面的結果，我們可以得到下一次有機會涉及類似旋轉體求體積的一道合理命題：

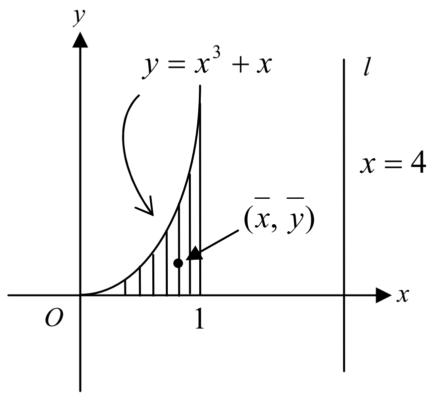
> 設 R_n 為曲線 $y=x^n$ 與直線 $y=x$ 為界在第一象限圍成的區域，V_n 為由區域 R_n 繞 $y=x$ 為旋轉軸旋轉一圈所得的旋轉體。
>
> (1).試利用 Pappus 定理求 V_n 的體積。
>
> (2).設 a_n 為 V_n 的體積，試求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 並解釋這個極限的幾何意義。

伍、結論與建議

最後我們終於澄清了何者為正確解法，不僅如此找出的 Pappus 定理事實也是我在大一微積分課程中強調的一個解足夠好的區域繞旋轉軸旋轉一圈，所得旋轉體的體積便捷的求法，山不轉路轉，在微積分的習題也有諸多的類似，顯示正確概念等基本功夫的培養與訓練非常的重要，否則給了一堆的錯誤的解法還是茫然不知呢！

原出現在期末考的考題，終於被提早發現易生誤解而不用 Pappus 定理的正解又是頗具難度的方法，於是被換掉了！現在發現對於知道 Pappus 定理的學生來說，這道被換掉的考題對我的學生而言，還是蠻合適！不過換成的問題雖然比較老舊，但它有三種解法也很適合當作考題，唯此道問題，甚至更一般化的情形，都不適用在高中選修數學（II）積分的考題上，不過當作平常作業或作徵答題是具有挑戰性的，甚至我感受到 Pappus 定理在微積分定積分的旋轉體體積問題，尤其由多項式函數所圍區域的旋轉體，常常會發揮了關鍵性的用途，甚至，Pappus 定理可用來取代不能使用圓盤法而必須使用圓柱殼法的旋轉體體積問題，例如：

> 求以函數圖形 $y=x^3+x$ 及兩直線 $y=0$，$x=1$ 為界的區域繞直線 $x=4$ 旋轉一圈所得旋轉體的體積。



可用 Pappus 定理解得如下：

1. 先求區域面積 A：

$$A:\int_0^1 (x^3+x-0)dx=\frac{3}{4}$$

2. 求區域形心的 x 坐標：

$$\bar{x}=\frac{\int_0^1 x(x^3+x-0)dx}{A}=\frac{4}{3}\int_0^1 (x^4+x^2dx)$$

$$=\frac{4}{3}\times\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{3}\right)=\frac{32}{45}$$

$\bar{y}$ 可以不必求出來。

3. 形心 $(\bar{x}, \bar{y})$ 到旋轉軸鉛直線 $x=4$ 的距離為 $(4-\bar{x})=\dfrac{148}{45}$

4. 旋轉體體積為 $2\pi\times\dfrac{148}{45}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{74\pi}{15}$

有鑑於此，綜合以上結果我個人對高中微積分教學提出如下的建議：高中微積分的課綱宜涵蓋 Pappus 定理求旋轉體體積的應用，高中選修數學（II）在課綱未明列 Pappus 定理之前，宜列 Pappus 定理的應用實例，高中或大學微積分的教學應補充並重視利用 Pappus 定理求旋轉體體積的方法。

最後，由此命題與解題的過程經歷，命題就此結束了嗎？於是利用一些時間反思研究，終於又再提出幾道可以試作的問題當作結尾。

問題（一）

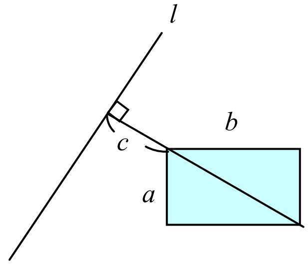
設 R 為平面上函數圖形 $y=4-x^2$ 與直線 $y=x+2$ 為界的區域，求 R 繞直線 $y=x+2$ 旋轉一圈所得旋轉體的體積。（參考答案：$\dfrac{999}{50}\pi$）

問題（二）

設 R 為平面上三次曲線 $y=x^3+x$ 與直線 $y=5x$ 在第一象限所圍區域，試求 R 繞直線 $y=5x$ 旋轉半圈所得旋轉體體積。（參考答案：$\dfrac{384\sqrt{26}}{1365}\pi$）

問題（三）：

試求下圖邊長分別為 a, b 的長方形區域，繞直線 l 旋轉一圈所得旋轉體的體積。（參考答案：$ab(2c+\sqrt{a^2+b^2})\pi$）



問題（四）：

在結論與建議上方的命題中，將旋轉軸改為「與區域 R_n 不相交的直線 $ax+by+c=0$ 旋轉一圈所得旋轉體 V_n」其餘不變下，試求 a_n 及 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$。

（參考答案：$a_n=\dfrac{\pi(n-1)}{3(n+1)}\left(\dfrac{\left|(4n^2+6n+2)a+(2n^2+6n+4)b+(6n^2+15n+6)c\right|}{(a^2+b^2)(2n^2+5n+2)}\right)\sqrt{a^2+b^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{2}{3}\pi\dfrac{|2a+b+3c|}{a^2+b^2}\sqrt{a^2+b^2}$ ）

後記：

* 由本文第 43 頁之旋轉體求體積之命題：

(2).設 a_n 為 V_n 的體積，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 並解釋這個極限的幾何意義。

知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{\sqrt{2}}{6}\pi$ 恰好是 ΔOBP 繞直線 $y=x$ 旋轉一圈所得旋轉體（兩大小全等其底面的雙正圓錐）的體積若第一種方法繼續作下去得

$$b_n=\pi\int_0^1\left(\frac{x-x^n}{\sqrt{2}}\right)^2dx=\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{2n+1}\right)$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\dfrac{\pi}{6}$ 跟上面情況比較自然不合，也可窺出第一種方法確定是誤解 *

** 當 f，g 都為多項式函數，且 $f(x)\ge g(x)$，$a\le x\le b$，則由 f，g 的函數圖形與鉛直線 x=a，x=b 為界所圍區域 R 的形心坐標 $(\bar{x},\ \bar{y})$ 公式：

$$\bar{x}=\frac{\int_a^b x(f(x)-g(x))dx}{A(R)}\quad \bar{y}=\frac{\int_a^b (\frac{f(x)+g(x)}{2})(f(x)-g(x))dx}{A(R)}$$

其中 A(R)表區域 R 的面積 **

參考資料

波利亞，怎樣解題，閻育蘇譯，九章出版社印行。
李虎雄、陳昭地、朱亮儒等（民 99），高中選修數學（II），康熹文化事業股份有限公司出版。
李虎雄、陳昭地、朱亮儒等（民 100），高中選修數學甲（II）書稿，康熹文化事業股份有限公司。
張海潮譯著，微積分（第 9 版），（Larson, Edwards 原著）歐亞書局有限公司出版。
陳昭地、顏啟麟等（民 72），微積分（再版），協進圖書有限公司印行
孫文先（民 67），簡明數學百科全書，九章出版社印行。
Larson, Edwards, Calculus (9th ed.). 歐亞書局有限公司代行。