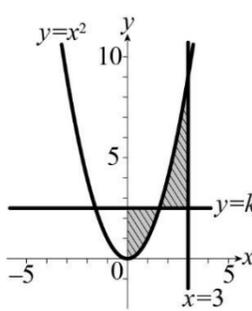


# 113 年國立鳳山高級中學教師甄選初試筆試試題【數學科】

一、 填充題 配分：每題 6 分，共 72 分。全對才給分。 答題：請標註題號並依題序作答，切勿跳題回答。

1. 已知  $m, n$  為正整數，且  $\sqrt{m} + \sqrt{n} = \sqrt{2023}$ ，試求數對  $(m, n)$  有 \_\_\_\_\_ 組解。
  2. 設四面體  $OABC$  之體積為 20，若  $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ ， $x, y, z \geq 0$  且滿足  $2 \leq x + y + z \leq 4$ ，試求一切  $P$  點所形成之圖形體積為 \_\_\_\_\_。
  3. 已知方陣  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ， $A^2 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & -6 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ 。設  $n$  為正整數，試用  $n$  表方陣  $A^n$  之一般式為 \_\_\_\_\_。
  4. 假設地球為一球體，今以地球球心為原點，地球半徑為單位長，建立一空間直角坐標系。設地球表面上甲、乙、丙三地，甲、乙兩地的座標分別為  $(1, 0, 0)$  及  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，丙地為甲乙兩地球面上最短路徑之中點，試求丙地之座標為 \_\_\_\_\_。
  5. 設  $a_1, a_2, a_3, \dots$  為一個等差數列， $b_1, b_2, b_3, \dots$  為一個等比數列。  
對於每一個正整數  $n$ ，設  $c_n = a_n + b_n$ ，組成數列  $c_1, c_2, c_3, \dots$ 。如果  $c_1 = 1$ ， $c_2 = 4$ ， $c_3 = 15$ ， $c_4 = 2$ ，  
試求  $c_6 =$  \_\_\_\_\_。
  6. 設  $\Gamma$  為二次函數  $y = x^2$  與直線  $x = 0$ 、 $x = 3$ 、 $y = k$  ( $0 < k < 9$ ) 在第一象限所圍的封閉區域 (附圖中的斜線區域)，當  $k = \alpha$  時， $\Gamma$  的面積最小為  $\beta$ ，試問  $\alpha + \beta =$  \_\_\_\_\_。
- 
7. 試求滿足方程式  $\left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor = \frac{x}{7}$  之所有實數解的和 = \_\_\_\_\_。
  8. 在複數平面上， $z$ ， $\frac{1}{z}$ ， $z + \frac{1}{z}$  與原點  $O$  圍成一平行四邊形，此平行四邊形面積為  $\frac{37}{35}$ 。  
已知  $z$  的實部是正數，若  $\left| z + \frac{1}{z} \right|$  的最小值為  $d$ 。試求  $d^2 =$  \_\_\_\_\_。
  9. 坐標平面上， $A(2, 2)$ ， $B(0, 8)$ ， $C(-16, 16)$  所形成的  $\triangle ABC$  繞著  $x$  軸旋轉一圈所得的旋轉體體積為何? \_\_\_\_\_。
  10. 某餐飲公司老闆正在安排一個六天春節期間的開店營業狀況，若此六天中，老闆每天都能自由考慮選擇開店營業或休息與否，但老闆訂定一個原則：只要沒有連續三日以上都不開店營業就好。例如：此六天(營,休,營,休,營,休)表示符合老闆原則的一種開店方法，但(營,休,休,休,營,休)未符合老闆原則。試問在滿足老闆原則下，此六天的開店方法數有幾種? \_\_\_\_\_。

背面尚有試題

11. 直線 $y = \sqrt{3}x$ 上有一點 $A$ ， $x$ 軸上有一點 $B$ ，圓 $(x - 12)^2 + (y - 5)^2 = 4$ 上有一點 $C$ 。求 $\triangle ABC$ 之最小周長為\_\_\_\_\_。

12. 由0,1,2,3(可重複)所組成長度為4的數字字串滿足：對於每一個小於4的正整數 $j$  ( $j=1,2,3$ )，數字字串中的數字  
至少有 $j$ 個數字不超過 $j$  (例如: 2113 是一個滿足條件的數字字串。但 0333 不是符合要求的數字字串。)  
，試問有\_\_\_\_\_個符合的數字字串。

二、計算證明題 答題：請標註題號並依題序作答，切勿跳題回答，並完整說明。

1. (8分) 試求  $\begin{vmatrix} \tan 40^\circ & \tan 10^\circ & \tan 50^\circ \\ \tan 20^\circ & \tan 50^\circ & \tan 70^\circ \\ \tan 10^\circ & \tan 70^\circ & \tan 80^\circ \end{vmatrix}$  之值。

2. (10分) 設 $x$ 、 $y$ 、 $z$ 皆為實數， $x^3 + y^4 = z^5$ ，若 $x = 2^{20n+8}$ ， $z = 2^{12n+5}$ ，試求 $6\log_2 x - 32\log_2 y + 30\log_2 z$ 的值。

3. (10分)  $f(x) = \sqrt{x-27} + \sqrt{40-x} + \sqrt{x}$ ，其中 $27 < x < 40$ ，試求 $f(x)$ 最大值為何？