桃園市立武陵高級中等學校113學年度第一學期第1次正式教師甄選

數學科 初試試題卷　　　**甄選證號：________________（請自行填寫）**

※ 應試說明：

★每張答案卷已標明題號，請依序作答，不可顛倒錯置。

★不得要求增補答案卷；考試結束，題目卷與答案卷請於交卷時一併繳回，**禁止攜出試場**。

一、填充題（每小題 5 分；共 75 分）

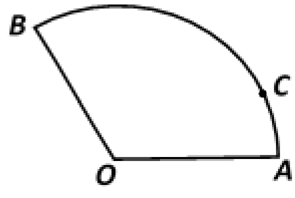
1. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+6n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+9n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+3n^2}}\right)=$__________。

2. 若過原點有三條相異直線與 $y=x^3+ax^2+1$ 相切，試求 實數 a 之範圍為__________。

3. 設 x、y、$z\in R-\{0\}$，若 $\dfrac{4y-7z}{x}=\dfrac{2x-2z}{5y}=\dfrac{x+2y}{z}$，試求 $x:y:z=$__________。

4. 有一半徑為 1 且圓心角為 120° 的扇形 OAB，如右圖，動點 C 在圓弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上變動。

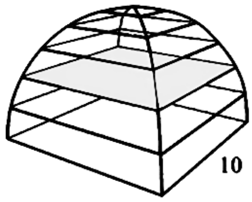
若 $\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$，$x,y\in\mathbb{R}$。試求 $x-y$ 的範圍為__________。



5. 擲一粒骰子兩次，點數依序為 (a,b)。
試求 使得$x^2+ax+b=0$有實根 α、β，且 $\alpha^2+\beta^2<11$ 的機率為________。

6. 設函數f 滿足 $f(1)=2$，且對每一個正整數x， $f(x+3)\geq f(x)+3$ ， $f(x+1)\leq f(x)+1$都成立，
試求 $f(2024)=$________。

7. 動物園用以下方式建立了一個大型鳥籠：在一個邊長為 10 公尺的正方形平台上，
立起兩支以底面對角線為直徑的半圓形鋼架，落腳點就在平台上的四個頂點上，
而交叉點在底面中心的正上方；然後在鋼架上張起鐵絲網，
使得每個水平面上的鐵絲網都是頂點落在鋼架上的正方形，
試求 此鳥籠的容積為________。



8. 設 $a=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}}$，求 a的整數部分為________。

9. 已知$\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\,(a>0,b>0)$，過$P(3\sqrt{3},1)$，求

(1) $a+b$之最小值為________。

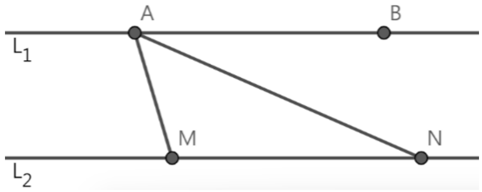
(2) 承(1)，此時Γ方程式為________。

10. 已知多項式函數 $f(x)=2x^3-3x^2+4x-2$，則 $\displaystyle\sum_{i=1}^{113} f(\frac{i}{113})=$________。

11. 有一顆公正的正六面體骰子，其六面分別標示 1, 2, 3, 4, 5, 6（每個點數會發生的機會均等），今連續投擲 113 次，且每次的結果互不影響，設a_i表示第i次投擲所得的點數，S_n表示前n次投擲所得的點數和，即$S_n=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}a_i$，隨機變數$X$表示$S_1,S_2,\cdots,S_{113}$中 6 的倍數之個數，則 X 的數學期望值$E(X)$為________。

12. 在平面直角坐標系中，已知圓C：$x^2+y^2=36$與定點$P(2,4)$，若M,N是圓C上的兩個相異動點，且滿足$\overrightarrow{PM}\bullet\overrightarrow{PN}=0$，則 $|\overrightarrow{PM}+\overrightarrow{PN}|$的最小值為_______。

13. 如圖所示，已知兩條平行直線 L_1, L_2 的距離為 2，兩個定點 A, B 在直線 L_1 上且 $\overline{AB}=4$，而兩個動點 M, N 在直線 L_2 上且 $\overline{MN}=4$。設△AMN 的外心 C 到直線 L_2 的距離是 d，則 $d+\overline{BC}$ 的最小值為________。



14. 設兩複數 z_1, z_2 滿足 $z_1+2\overline{z_2}=-i$ 與 $z_1\times z_2=-3+i$，其中 $i=\sqrt{-1}$，則 $|z_1|$ 的值為__________。

二、計算證明題：（每題 15 分；共 45 分）

1. （1）已知：$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n$，$b_1 \le b_2 \le b_3 \le \cdots \le b_n$，

求證：$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + \cdots + a_nb_n \ge a_1b_{i_1} + a_2b_{i_2} + a_3b_{i_3} + \cdots + a_nb_{i_n}$，

其中 $(i_1, i_2, i_3, \cdots i_n)$ 為 $(1,2,3,\ldots,n)$ 的一種排列。

（2）已知 a、b、c 為正數，求證：$\frac{c^2-a^2}{a+b}+\frac{a^2-b^2}{b+c}+\frac{b^2-c^2}{c+a}\ge 0$。

2. 已知 $a,b,c,d>0$，

試證：$\dfrac{a^3+b^3+c^3}{a^2+b^2+c^2}+\dfrac{b^3+c^3+d^3}{b^2+c^2+d^2}+\dfrac{c^3+d^3+a^3}{c^2+d^2+a^2}+\dfrac{d^3+a^3+b^3}{d^2+a^2+b^2}\ge a+b+c+d$。

3. 試求最小正實數 r，使得存在正實數數列 $\{a_n\}$ 滿足對任意正整數 n 都有 $a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}\le ra_n$。