國立新竹女子高級中學 113 學年度第 1 學期第 1 次教師甄選　數學科試題卷
公告版

說明:依教師甄選規定公告選擇題、配合題或填充題試題及答案。

一、填充題：每題 5 分，共 50 分

1. 已知 w 和 z 是兩個複數且滿足 $|w|=3$ ，$|z|=4$ ，若 $\theta=\arg\left(\dfrac{w-z}{z}\right)$ ，則 $\tan^2\theta$ 的最大值為_____。 $\frac{9}{7}$

2. 設函數 $f(x)=2x+\sqrt{9x^2+16}$ 在 $x=\alpha$ 時，有最小值 $f(\alpha)=\beta$ ，試求數對 $(\alpha,\beta)=$_________。 $(\frac{-8\sqrt{5}}{15},\frac{4\sqrt{5}}{3})$

3. 設 ΔABC 中，$\angle BAC=60°,\ \overline{AB}=4\sqrt{3},\ \overline{AC}=2\sqrt{3}$ ，D 在 $\overline{BC}$ 上，且 $\overline{AD}$ 是 $\angle BAC$ 的角平分線，若 P 是線段 $\overline{AD}$ 上的動點，則 $(\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC})\cdot\overrightarrow{PA}$ 的最小值為何？__________ -12

4. 一正方形紙張 $ABCD$ ，設點 E, F 分別在 $\overline{BC}, \overline{DC}$ 邊上，且 $\overline{BE}:\overline{EC}=\overline{DF}:\overline{FC}=2:1$ 。現以正方形 $ABCD$ 為底面，分別將 B, D 以 $\overline{AE}, \overline{AF}$ 為谷摺線向上摺起，使得 $\overline{AB}, \overline{AD}$ 重合，並令重合後的點 $B=D=G$ 。此時，若側面 ΔAEG (或 ΔAFG)與鳶形底面 $AECF$ 的夾角為 θ ，則 $\sin\theta=$______。 $\frac{\sqrt{91}}{10}$

5. 小沂在平面上以下面丟骰子的方式前進：丟一公正六面骰子，出現 n 點就往前走 n 公尺，接著順時針轉 60 度。接著再繼續丟骰子，如上述方式前進以及轉向。則小沂丟五次骰子並走完後回到原來出發位置的機率為_____________（分母可以不用乘開）。 $\frac{55}{6^5}$

6. 若 S 是滿足 $0<x\le 1$ 、$0<y\le 1$ 且 $\left[\log_2\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ 與 $\left[\log_3\left(\frac{1}{y}\right)\right]$ 均為奇數的坐標 (x,y) 所組成的集合，則集合 S 所表示的圖形面積為_____。
（$[x]$ 表不大於 x 的最大整數）。 $\frac{1}{12}$

7. 考慮集合 $\{1,2,3,...,2024\}$ 的子集 S ，其中集合 S 的元素個數為 1000 。若從滿足上述條件中的每個集合 S 裡挑選出最小的元素，則所有這些最小元素的算術平均數為_________。 $\frac{2025}{1001}$

8. 設數列 $a_k=k^3$ ，試求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{3n-1}\frac{n^2}{a_k}=$__________。 $\frac{4}{9}$

9. 設 $A(1,\sqrt{3}),\ B(1,-\sqrt{3})$ 為平面上兩定點，動點 P 在線段 $\overline{AB}$ 上。O 為原點，且 Q 在射線 $\overrightarrow{OP}$ 上，並滿足 $\overline{OP}\cdot\overline{OQ}=4$ 。當動點 P 由 A 延著線段 $\overline{AB}$ 移動到 B 時，試求 Q 點軌跡圖形的路徑長為何？__________ $\frac{8\pi}{3}$

10. 冰果飲料店推出集字活動，凡購買任何一杯飲品，皆能獲得一張集字卡，只要收集「中」、「獎」、「囉」三字，即可免費兌換一杯綠茶。已知集字卡上出現「中」的機率為 $\frac{1}{2}$ 、出現「獎」的機率為 $\frac{1}{3}$ 、出現「囉」的機率為 $\frac{1}{6}$ 。請問成功收集到「中」、「獎」、「囉」三字，所需要購買飲品杯數的期望值為_____________杯。 $\frac{73}{10}$

二、偵錯題、說明題：(共 12 分)(※請務必寫下原因或說明過程，否則不予計分)

空間中，A 點坐標為 $(-2,8,0)$ ，B 點坐標為 $(3,1,4)$ ，P 點為 y 軸上一點，當 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值時，P 點坐標為何？

【以下為學生小沂的解法】

因為 $\overline{PA}\ge 0$ ，$\overline{PB}\ge 0$ ，故由算幾不等式可得

$$\frac{\overline{PA}+\overline{PB}}{2}\ge\sqrt{\overline{PA}\times\overline{PB}}$$

等式成立時，$\overline{PA}+\overline{PB}$ 有最小值且發生在 $\overline{PA}=\overline{PB}$ 時。因為 P 點為 y 軸上一點，假設 P 點坐標為 $(0,y,0)$ ，

$$\overline{PA}=\overline{PB}\Rightarrow\sqrt{2^2+(y-8)^2}=\sqrt{3^2+(y-1)^2+4^2}\Rightarrow y=3，$$

因此，P 點坐標為 $(0,3,0)$ 。

1. 請問：小沂的解法是對的嗎？若老師覺得此學生的解法錯誤，要如何協助學生釐清錯誤的迷思呢？(4 分)
2. 如果您正在教授「高一」的學生，想避免學生有類似上述的錯誤方式，您要如何設計一道數學題目並給出類似上面的錯誤解法，讓學生偵錯呢？透過此道數學題目，要如何協助學生釐清錯誤的迷思呢？(8 分)

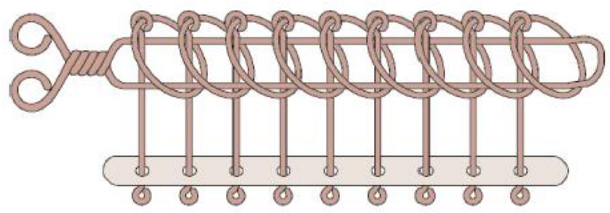
三、計算證明題，共 38 分

1. 閱讀以下文章並回答下面問題：(上面題目的性質或解答即使無法證明，依然可以用來解下面的問題，但反之不行。)

九連環是一種源於中國傳統的智力遊戲。這玩具由兩個主要部份構成：一部分為「九個環」，另一部分為一把「劍」，遊戲目標是把九個圓環全部套上或全部卸下。右圖為九個圓環全部套上的示意圖。每個環有兩種狀態，一個是被劍穿過（掛在劍上），一個是與劍分離。每次改變一個環的狀態稱作一步。但不是任意的環都能改變狀態，必須符合下列兩種條件之一（依右圖的左右方向）才能改變狀態：

（R）最右邊的環

（S）劍上最右邊環之左邊的環



《本文參考自數學傳播 38 卷第 3 期》

解法：我們給出一個數學模型如下

令 1 表示環在劍上，用 0 表示環不在劍上，而九個環的狀態就寫成一個 9 位的二進位數。而這兩種操作方式 R 與 S 視為狀態函數。

舉例來說：$R(101011100_2) = 101011101_2$ 或 $S(101011100_2) = 101010100_2$。遊戲過程中只要不斷的操作 R 與 S，我們就**一定**能夠將 111111111_2 變為 000000000_2

問題 1：將每一個狀態想成一個點，若兩個狀態之間可以經由 R 或 S 的一次變換得到，則將這兩點連線(Edge)。試證明：九連環中這 2^9 個點與這些邊(Edge)所形成的圖 $G = (V, E)$ 為連通圖。(意即任一個狀態可以經由一連串的 R 或 S 變換得到任一個狀態)（10 分）

問題 2：證明圖 G 為路徑(Path)。(除了頭尾的點只有一個邊連到其他某個點，其他的點皆為兩個邊連至某兩個點，右圖為一路徑的範例。)（4 分）

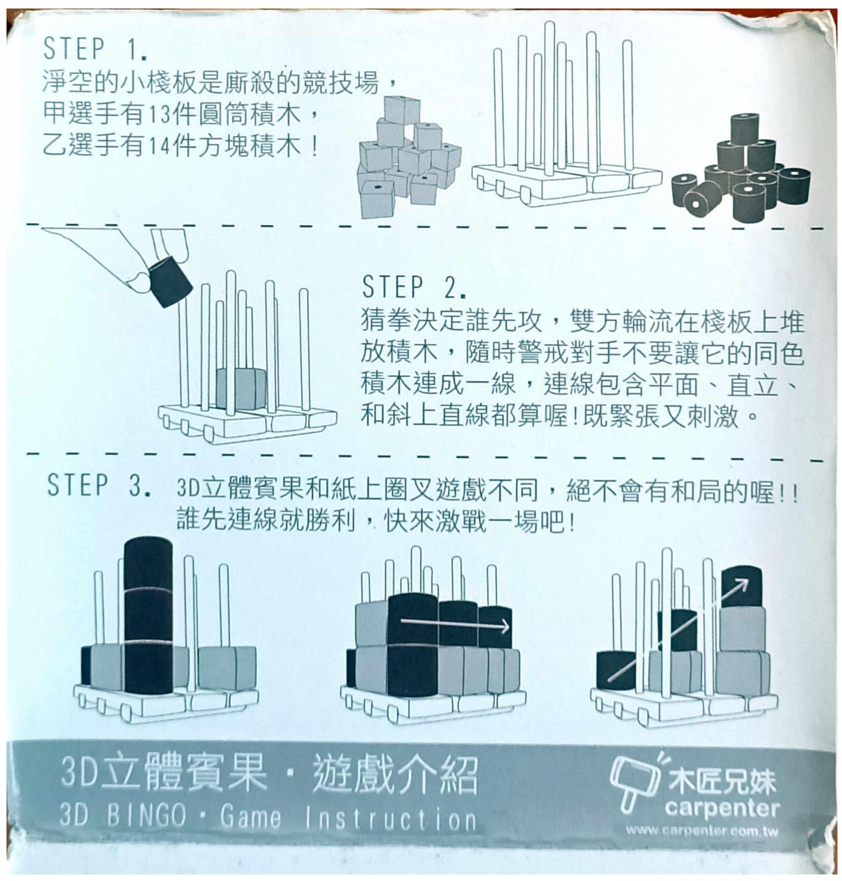
問題 3：請問在什麼樣的起始狀態下，要將劍抽離環的最少步數有最大值？（請回答起始狀態以及步數）（4 分）

100000000_2、511

問題 4：請問標準遊戲的九連環，最少要幾步才能將劍完全抽離環？（也就是將 111111111_2 變為 000000000_2）（5 分）

341

2. 右圖和下圖為 3D 立體賓果的遊戲圖片及說明規則，請閱讀完後回答以下兩個問題：



(1) 此遊戲宣稱「絕不會有和局」，請驗證此話的真假並給出證明。(12 分)

(2) 關於這個遊戲，如果雙方皆有必和策略，請給出證明；若是某方具有必勝策略，請說明是先手或後手必勝，並給出其策略為何。(3 分)