

二、計算題(共 66 分)

1、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ ，定義 $f_1(x) = \sin x$ 且 $f_{n+1}(x) = \sin(f_n(x))$

(1)證明 $x > \sin x > 0$ 。

(2)證明 $n \rightarrow \infty$ ， $f_n(x)$ 收斂。

(3)找到(2)的極限，以 x 表示。

2、有一直線 L_1 ，與 $L_2: \frac{x}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{1}$ ， $L_3: \frac{x+3}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{5}$ ，各交一點，若

$A(-4, -5, -6)$ 在 L_1 上，求 L_1 與 L_2 的交點坐標。(12分)

3、小綠和小青打球，小綠成功回球機率 $\frac{3}{4}$ ，小青成功回球機率 $\frac{2}{3}$ ，假設小綠成功發球

後，求回球次數 n 的期望值。

4、全部有 n 個同學排座位，小綠在小英和小美左邊。

同學計算方法覺得如下：

小綠在小英左邊的機率為 $\frac{1}{2}$ ，小綠在小美左邊的機率為 $\frac{1}{2}$ ，所以小綠在小英跟小美左邊

的機率為 $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ ，試問同學哪些部分有問題？正確答案多少？你要如何引導同學？

5、學生解『設 $\vec{a} = (1, 5, 7)$ 、 $\vec{b} = (3, 4, 5)$ 、 $\vec{c} = (1, 1, 1)$ ，且 x 、 y 為實數，則

$|\vec{a} - x\vec{b} - y\vec{c}|$ 之最小值為？』此題目時，只寫出 $\vec{a} - x\vec{b} - y\vec{c} = (1 - 3x - y, 5 - 4x -$

$y, 7 - 5x - y)$ 就卡住了，請引導他解出這題。(10分)

6、112 學年度分科測驗數學甲，

『試問極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n^2} (\sqrt{4n^2 + 9 \times 1^2} + \sqrt{4n^2 + 9 \times 2^2} + \dots + \sqrt{4n^2 + 9 \times (n-1)^2})$ 』

的值可用下列哪一個定積分表示？

(1) $\int_0^3 \sqrt{1+x^2} dx$ (2) $\int_0^3 \sqrt{1+9x^2} dx$ (3) $\int_0^3 \sqrt{4+x^2} dx$ (4) $\int_0^3 \sqrt{4+9x^2} dx$

(5) $\int_0^3 \sqrt{4x^2+9} dx$

請說明如何教學生求解。(10分)