



2021 年亞太數學奧林匹亞競賽 初選考試第二階段試卷

考試時間：2021年1月27日

中華民國國際數理學科奧林匹亞競賽

考試地點：國立中央大學

諮詢委員會數學工作小組試題組提供

注意事項：

- (1)本試卷共五題，每題滿分七分。
- (2)考試時間：4 小時(9:30 - 13:30)。
- (3)所有計算紙必須連同試卷繳回。
- (4)不可使用計算器、修正液(帶)。
- (5)計算紙可再索取，試卷本每人限一份。

| | 第一題 | 第二題 | 第三題 | 第四題 | 第五題 |
|------|-----|-----|-----|-----|-----|
| 初閱得分 | | | | | |
| 初閱簽名 | | | | | |
| 複閱得分 | | | | | |
| 複閱簽名 | | | | | |

2021 年亞太數學奧林匹亞初選考試（二）試題

比賽日期：2021 年 1 月 27 日

時間限制：四小時 (9:30–13:30)

除作圖外, 答案限用黑色或藍色筆書寫。答案不得以修正液 (帶) 修正。

計算紙必須連同試卷交回。不得使用計算器。

本試卷共五題, 每題滿分七分

問題一. 給定一三角形 ABC , 作以邊 AB 為直徑的圓 Γ , 並設 Γ 與 AC, BC 邊分別再交於點 D, E 。分別由 D, E 點向 AB 引垂線, 令垂足分別為點 F, G 。設線段 DG 與 EF 交於點 M 。試證：直線 CM 與 AB 垂直。

問題二. 已知某一個臉書社團裡有若干位成員，其中每一位都與社團裡的另外 36 位成員是好友。對於任何兩位社團成員 X 與 Y ，若他們是好友，則在社團裡恰有另外 18 位成員同時與 X 和 Y 是好友；反之，如果 X 與 Y 不是好友，則在社團裡恰有另外 4 位成員同時與 X 和 Y 是好友。試求此社團的成員人數。

問題三. 試找出方程式

$$3x^2 + 2xy = (x + y)^3$$

的所有整數解 (x, y) 。

問題四. 設正實數 a, b, c, d 滿足 $a + b + c + d = 1$ 。證明：

$$a^a b^b c^c d^d \geq \frac{(abcd)^{1/4}}{\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{cd} + \sqrt{da}}.$$

問題五. 以三角形 ABC 的三條邊 BC, CA, AB 為底，分別向外作正方形 Q_A, Q_B, Q_C 。設 Q_B 中與頂點 A 相鄰的兩頂點為 C, D ，又設 Q_C 中與頂點 A 相鄰的兩頂點為 B, E 。令 Q_A 的中心點為 M 。試證： AM, BD, CE 三線共點。

