# 2022 年亞太數學奧林匹亞初選考試（二）試題

比賽日期：2022 年 2 月 9 日

時間限制：四小時 (9:30–13:30)
除作圖外, 答案限用黑色或藍色筆書寫。答案不得以修正液 (帶) 修正。
計算紙必須連同試卷交回。不得使用計算器。
本試卷共五題, 每題滿分七分

**問題一**. 在銳角三角形 $ABC$ 中，$AH$ 為一條高，而 $BM$ 是一條中線。於三角形 $BHM$ 的外接圓上取一點 $D$ 使得 $AD$ 與 $BM$ 平行，並且點 $B$ 和 $D$ 位於直線 $AC$ 的兩側。試證 $BC = BD$。

**問題二**. 證明：存在一個正數 $C > 0$ 使得對所有的正整數 $n \geq 2$，下列性質成立：

在區間 $(0, 1)$ 中任取 $n$ 個相異有理數 (以最簡分數表示)，這些有理數的分母總和必大於 $Cn\sqrt{n}$.

**問題三**. 證明存在 2022 個相異正整數 $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$，使得對於任意相異 $i, j$, 都有 $(a_i - a_j)^2$ 整除 $a_i a_j$。

**問題四**. $A$ 是平面上的一個凸 2022 邊形，其頂點依序為 $P_0, P_1, \cdots, P_{2021}$。我們選擇 $A$ 的 2020 條不相交對角線，並用其將 $A$ 分割為 2021 個不重疊的三角形。試證：不論我們如何選擇這些對角線，我們都可以將這些三角形用 1 到 2021 編號，使得對於所有 $i = 1, 2, \cdots, 2021$，$P_i$ 都是第 $i$ 號三角形的其中一個頂點。

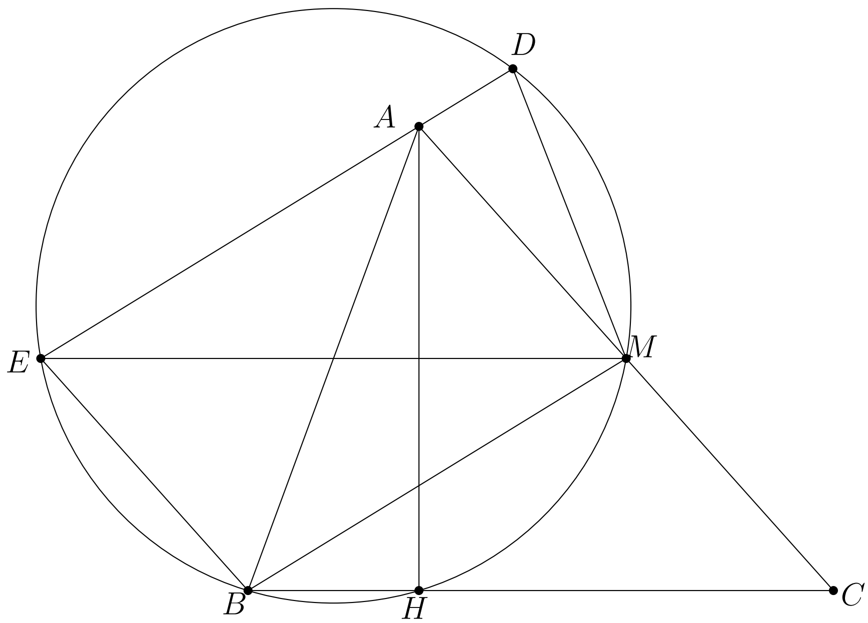
**問題五**. 設 $P$ 為三角形 $ABC$ 內部一點，滿足

$$\angle BPC - \angle PBC = \angle CPA - \angle PCA = \angle APB - \angle PAB = 90^\circ.$$

證明：三角形 $ABC$ 是一個正三角形。

# 2022 年亞太數學奧林匹亞初選考試（二）試題詳解暨評分標準

**問題一**. 在銳角三角形 $ABC$ 中，$AH$ 為一條高，而 $BM$ 是一條中線。於三角形 $BHM$ 的外接圓上取一點 $D$ 使得 $AD$ 與 $BM$ 平行，並且點 $B$ 和 $D$ 位於直線 $AC$ 的兩側。試證 $BC = BD$。




解.

在平面上取一點 $E$ 使得四邊形 $AMBE$ 為平行四邊形。因為 $MC = AM = BE$ 且直線 $MC(= AM)$ 平行於 $BE$，所以四邊形 $BCME$ 也是平行四邊形。注意到直角三角形 $AHC$ 中有 $\angle MHC = \angle MCH$，又平行四邊形 $BCME$ 中 $\angle MCH = \angle MEB$，得 $\angle MHC = \angle MEB$，所以 $EBHM$ 為圓內接等腰梯形 $(BE = MC = MH)$。

因為 $EA$, $AD$ 都平行於 $BM$，所以 $E, A, D$ 三點共線。因此四邊形 $BEDM$ 為等腰梯形或矩形。故得 $BD = EM = BC$。證畢。

**Suggested marking scheme**

- 作出 $E$ 點使得 $AMBE, BCME$ 皆為平行四邊形，得 2 分。
- 證出 $EBHM$ 為等腰梯形，再得 3 分，累計 5 分。
- 證出 $BEDM$ 為等腰梯形，從而得到 $BD = BC$，再得 2 分，累計 7 分。

**問題二**. 證明：存在一個正數 $C>0$ 使得對所有的正整數 $n\geq 2$，下列性質成立：

在區間 $(0,1)$ 中任取 $n$ 個相異有理數 (以最簡分數表示)，這些有理數的分母總和必大於 $Cn\sqrt{n}$.

解. **參考解答一.** 設 $n$ 個有理數為

$$0<\frac{a_1}{b_1}<\cdots<\frac{a_n}{b_n}<1.$$

令 $N=b_1+\cdots+b_n$.

現在我們任意給定正整數 $t>1$。再將這些有理數分成兩部分，第一部分為分母 $\leq t$，第二部分為分母 $>t$。顯然第一部分的有理數最多只有 $1+\cdots+(t-1)=t(t-1)/2$ 個。假設第二部分的有理數有 $m$ 個，則 $N\geq\sum_{b_i>t}b_i>t\sum_{b_i>t}1=tm$. 因此，我們得到 $n<t(t-1)/2+m<t^2/2+N/t$ 對任意的 $t>1$ 恆成立.

另方面，由算幾不等式我們有 $t^2/2+N/t\geq 3(N^2/8)^{1/3}$，等號僅當 $t=N^{1/3}$ 時成立。既然在區間 $(0,1)$ 的最簡分數的分母必大於 1，顯然此 $t=N^{1/3}>1$ (雖然只當 $N$ 為立方時，此不等式的等號才會成立，但對一般的 $N$ 並不會影響我們的結果). 因此我們得到 $n<\frac{3}{2}N^{2/3}$，$C=(2/3)^{3/2}$ 即滿足條件。 □

**參考解答二.** 將 $(0,1)$ 區間的有理數按分母從小到大排列為：

$$A:\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\ldots$$

將 $A$ 中的非最簡分數刪去來排序為：

$$B:\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\ldots$$

令 $k\geq 2$ 為滿足 $1+\cdots+(k-1)\leq n<1+\cdots+k$ 的正整數，則 $B$ 中的 $n$ 個不同分數的分母之和 $N$ 不小於 $A$ 中前 $n$ 個分數的分母之和：

$$N\geq\sum_{i=2}^{k}i(i-1)=\frac{k^3-k}{3}.$$

不難驗證

$$N^2\geq\frac{k^2(k+1)^2(k-1)^2}{9}\geq\frac{1}{9}(\frac{k(k+1)}{2})^3>\frac{n^3}{9}.$$

故 $C=1/3$ 滿足條件。 □

**Suggested marking scheme**

記這 $n$ 個最簡分數的分母總和為 $N$。

參考解答一.

- 證明 $n < t(t-1)/2 + m < t^2/2 + N/t$ 對任意 $t > 1$ 恆成立，得 3 分。
- 利用算幾不等式得 $n < \frac{3}{2}N^{2/3}$，即 $N > (2/3)^{3/2} n\sqrt{n}$，再得 4 分，累計 7 分。

參考解答二.

- 利用 Feray sequence 排出分數，得 $N \geq \dfrac{k^3 - k}{3}$，其中 $k$ 為正整數且 $\frac{k(k-1)}{2} \leq n < \frac{k(k+1)}{2}$，得 3 分。
- 證明 $N^2 \geq \dfrac{n^3}{9}$，即 $C = 1/3$ 滿足題設，再得 4 分，得 7 分。

**問題三**. 證明存在 2022 個相異正整數 $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$，使得對於任意相異 $i, j$, 都有 $(a_i - a_j)^2$ 整除 $a_i a_j$。

**解**. The statement works for sequence with length of any $n$. Prove by induction. For $n = 2$, $a_1 = 1, a_2 = 2$ satisfies the condition.

Suppose $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfies the condition. Let $m = \prod_{i=1}^{n} a_i$ and $b_i = a_i + km$, then clearly sequence $\{b_i\}_{i=1}^{n}$ also satisfies the condition for any positive integer $k$.

Let $b_{n+1} = (k+1)m$, we have $b_{n+1} - b_i = m - a_i$. Choose $k$ so that $k+1$ is a multiplier of every $(m - a_i)^2$, then $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ satisfies the condition.

**Suggested marking scheme**

將 2022 換成一般的 $N$，利用數學歸納法證明此命題對所有正整數 $N > 1$ 皆成立。

- 若 $a_1, \ldots, a_n$ 滿足命題，則調整成有用的 $b_1, \ldots, b_n$ 亦成立，得 4 分。
- 利用上面有用的 $b_1, \ldots, b_n$ 來建構 $b_{n+1}$，再得 2 分，累計 6 分。
- 驗證 $N = 2$ 成立 (或 $N = 3, 4$)，獨立得 1 分。

**問題四.** $A$ 是平面上的一個凸 2023 ~~2022~~ 邊形，其頂點依序為 $P_0, P_1, \cdots, P_{\cancel{2021}}$ 2022。我們選擇 $A$ 的 2020 條不相交對角線，並用其將 $A$ 分割為 2021 個不重疊的三角形。試證：不論我們如何選擇這些對角線，我們都可以將這些三角形用 1 到 2021 編號，使得對於所有 $i = 1, 2, \cdots, 2021$，$P_i$ 都是第 $i$ 號三角形的其中一個頂點。

**解.** 讓我們用數歸證明，原命題在把 $(n+2)$ 邊形切成 $n+1$ 個三角形時都成立。

$n = 2$ 時顯然。現在假設命題在 $n-1$ 時成立。考慮 $n$ 時的狀況，注意到此時：

- $n+1$ 個三角形共需 $3(n+1)$ 條邊；
- 每兩個三角形最多重合一個邊，所以 $n$ 條對角線最多只能提供 $2n$ 條邊。

以上兩點表示至少要有兩個三角形有兩條邊與 $A$ 的邊重合（否則總邊數至多 $2n + n + 2 < 3(n+1)$，矛盾。）令這兩個三角形為 $X$ 和 $Y$。

令 $X$ 與 $A$ 重合的兩個邊之交點為 $P_X$，$Y$ 與 $A$ 重合的兩個邊之交點為 $P_Y$。注意到 $P_X$ 與 $P_Y$ 不可能都屬於 $\{P_0, P_{n+1}\}$，否則 $X$ 與 $Y$ 必須共邊 $P_0P_{n+1}$，而這是不可能的。這表示 $P_X$ 與 $P_Y$ 中必須有一個等於某個 $P_j$，其中 $j \in \{1, 2, \cdots, n\}$；不失一般性假設是 $P_X = P_j$。

現在，考慮從 $A$ 扣除 $P_X$ 後剩下的多邊形 $P_0P_1 \cdots P_{j-1}P_{j+1} \cdots P_{n+1}$，將這些頂點重新令為 $Q_0Q_1 \cdots Q_n$。依據歸納假設，我們可以將其內的 $n$ 個三角形用 1 到 $n$ 編號，使得 $Q_i$ 為 $i$ 號三角形的頂點。將所有編號 $\geq i$ 的三角形編號都加 1，則易知對於所有 $i \neq j$，$P_i$ 為 $i$ 號三角形的頂點。最後將 $P_X$ 令為 $j$ 號三角形，則 $P_j$ 亦為 $j$ 號三角形的頂點。因此原命題在 $n$ 時亦成立，故由數學歸納法，得證。

**Suggested marking scheme**

將 2022 換成一般的 $n$，利用數學歸納法證明此命題對所有正整數 $n > 3$ 皆成立。

- 在一般的 $n$ 時，至少有兩個三角形 $X, Y$，它們各至少有兩條邊是 $A$ 的邊，得 2 分。
- (不失一般性) $P_X = P_j$ 對某個 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 成立，再得 2 分，累計 4 分。
- 利用歸納法假設 $n-1$ 成立，調整三角形的編號使命題在 $n$ 時成立，再得 2 分，累計 6 分。
- 驗證 $n = 4$ 成立 (或 $n = 5$)，獨立得 1 分。

**問題五**. 設 $P$ 為三角形 $ABC$ 內部一點，滿足

$$\angle BPC - \angle PBC = \angle CPA - \angle PCA = \angle APB - \angle PAB = 90^\circ.$$

證明：三角形 $ABC$ 是一個正三角形。

**解**. 設 $\alpha = \angle PBC, \beta = \angle PCA, \gamma = \angle PAB$，則

$$\angle BCP = 90^\circ - 2\alpha, \quad \angle CAP = 90^\circ - 2\beta, \quad \angle ABP = 90^\circ - 2\gamma,$$

故 $\alpha, \beta, \gamma < 45^\circ$。由三角形內角和 $180^\circ$，$\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$。由角元西瓦定理，

$$\frac{\sin\gamma}{\sin(90^\circ - 2\beta)} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(90^\circ - 2\gamma)} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(90^\circ - 2\alpha)} = 1. \tag{1}$$

接著我們證明

$$\frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{\cos(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)\cdot\cos(2\gamma)} \geq 1 \tag{2}$$

且等號只成立於 $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$。假設 $\alpha \geq \beta \geq \gamma$，則 $\alpha + \beta \geq 60^\circ$。我們希望將 $\alpha, \beta$ 調整成 $\delta = \frac{\alpha+\beta}{2}$。注意到

$$\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos(2\alpha)\cos(2\beta)} = \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)}{\cos(2\alpha+2\beta)+\cos(2\alpha-2\beta)} = \frac{\sin^2\delta - \sin^2(\frac{\alpha-\beta}{2})}{\cos^2(2\delta) - \sin^2(\alpha-\beta)} \geq \frac{\sin^2\delta}{\cos^2(2\delta)}$$

若且唯若

$$\sin(\alpha-\beta)\sin\delta \geq \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos(2\delta).$$

由二倍角公式，上式又等價於 $\alpha = \beta$ 或 $2\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})\sin\delta \geq \cos(2\delta)$，而後者由 $\delta \geq 30^\circ$ 及 $\frac{\alpha-\beta}{2} < 2\delta$ 顯然成立且不等號是嚴格的：

$$(2\sin\delta)\cdot\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) > 1\cdot\cos(2\delta).$$

所以我們有

$$\frac{\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\cos(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)\cdot\cos(2\gamma)} \geq \frac{\sin^2\delta\cdot\sin\gamma}{\cos^2(2\delta)\cdot\cos(2\gamma)}$$

且等號成立於 $\alpha = \beta = \delta$。接著，令 $x = \cos(2\delta) \leq \frac{1}{2}$，由 $\gamma = 90^\circ - 2\delta$，

$$\frac{\sin^2\delta\cdot\sin\gamma}{\cos^2(2\delta)\cdot\cos(2\gamma)} = \frac{\sin^2\delta}{\cos(2\delta)(-\cos(4\delta))} = \frac{(1-x)/2}{x(1-2x^2)} = 1 + \frac{(2x-1)^2(x+1)}{2x(1-2x^2)} \geq 1$$

且等號成立於 $\delta = 30^\circ$。所以 $\alpha = \beta = \gamma = 30^\circ$，即 $\triangle ABC$ 為正三角形。

**Suggested marking scheme**

- 證出 (1)，得 2 分。
- 證出 (2)，再得 3 分，累計 5 分。
- 利用 (2) 等號成立的條件，完成原題證明，再得 2 分，累計 7 分。