2024 年亞太數學奧林匹亞初選考試 (二) 試題

比賽日期：2023 年 1 月 24 日

時間限制：四小時 (9:30–13:30)

除作圖外, 答案限用黑色或藍色筆書寫。答案不得以修正液 (帶) 修正。

計算紙必須連同試卷交回。不得使用計算器。

本試卷共五題, 每題滿分七分

問題一. 有體重 1 到 10 的骷髏各一隻。芙莉蓮命令阿烏拉將這些骷髏排成一橫列，使得任何相鄰三隻骷髏的體重總和都不超過 15。試問阿烏拉能否達成芙莉蓮的命令？

Problem 1. There are 10 skeletons with weights 1 to 10, respectively. Frieren orders Aura to place these skeletons in a row, so that any three neighbouring skeletons have a total weight no greater than 15. Can Aura fullfils Frieren's order?

問題二. 設 $f(x)$ 爲實係數多項式。已知 $f(3)$ 爲正質數，且不等式

$$x+1 \leqslant f(x) \leqslant 3x^2-5x+4.$$

對所有實數 x 均成立。試求 $f(11)$ 的最大可能值。

Problem 2. Let $f(x)$ be a real polynomial. Given that $f(3)$ is a positive prime number, and the inequality

$$x+1 \leqslant f(x) \leqslant 3x^2-5x+4$$

holds for all real numbers x, find the largest possible value for $f(11)$.

問題三. 自然數 x 以十進制表示時，各位數字的乘積等於 $x^2 - 20x - 88$。試求所有滿足以上條件的 x。

Problem 3. A natural number x, when expressed in decimal notation, has the product of its digits equal to $x^2 - 20x - 88$. Find all possible x.

問題四. 銳角三角形 ABC 中 $\angle B > \angle C$，點 I 為其內心，R 為其外接圓半徑，而 D 為 A 點在 ABC 上的垂足。點 K 落於直線 AD 上，使得 $AK = 2R$，且 D 在 A 與 K 之間。證明：

$$\angle KID = \frac{\angle B - \angle C}{2}.$$

Problem 4. Given an acute triangle ABC with $\angle B > \angle C$, point I is the incenter, and R the circumradius, and point D is the foot of the altitude from vertex A. Point K lies on line AD such that $AK = 2R$, and D separates A and K. Prove that

$$\angle KID = \frac{\angle B - \angle C}{2}.$$

問題五. 一個正五邊形的五個頂點各被賦予一個整數，使得所有頂點的數字總和大於零。若連續三個頂點的數字依序為 x、y 和 z，且 $y < 0$，則我們可以對其進行以下操作：將 x、y 和 z 分別改為 $x + y$、$-y$ 和 $z + y$。只要五個頂點中任一頂點的數字小於零，我們便會持續進行操作。試問：以上操作是否必然只能操作有限次？

Problem 5. To each vertex of a regular pentagon an integer is assigned, so that the sum of all five numbers is positive. If three consecutive vertices are assigned the numbers x, y, z respectively, and $y < 0$, then the following operation is allowed: x, y, z are replaced by $x + y, -y, z + y$ respectively. Such an operation is performed repeatedly as long as at least one of the five numbers is negative. Determine whether this procedure necessarily comes to an end after a finite number of steps.

2024 年亞太數學奧林匹亞初選考試（二）試題詳解暨評分標準

問題一. 有體重 1 到 10 的骷髏各一隻。芙莉蓮命令阿烏拉將這些骷髏排成一橫列，使得任何相鄰三隻骷髏的體重總和都不超過 15。試問阿烏拉能否達成芙莉蓮的命令？

解. 阿烏拉無法滿足命令。歸謬證法，假設存在滿足題意的排列 $a_1, \cdots, a_{10}$。由題意有

$$55 = 1 + \cdots + 10 = a_1 + (a_2 + a_3 + a_4) + \cdots + (a_8 + a_9 + a_{10}) \leq a_1 + 45,$$

故 $a_1 = 10$。但由對稱性，我們同樣可推得 $a_{10} = 10$，但這是不可能的，故得證。

Marking scheme

問題二. 設 $f(x)$ 爲實係數多項式。已知 $f(3)$ 爲正質數，且不等式

$$x+1 \leqslant f(x) \leqslant 3x^2-5x+4.$$

對所有實數 x 均成立。試求 $f(11)$ 的最大可能值。

解. $f(11)$ **的最大值爲** 237**。**

首先，若 $f(x)$ 的首項 $a_n x^n$ 中 $n \geq 3$，若 $a_n > 0$ 則當 x 充分大時有 $f(x) > 3x^2-5x+4$，而若 $a_n < 0$ 則當 x 充分大時有 $f(x) < x+1$，兩者皆矛盾，故 $f(x)$ 至多爲二次多項式。

此外，注意到 $y = x+1$ 爲二次函數 $y = 3x^2-5x+4$ 在點 $(1,2)$ 處的切線。由於 $3x^2-5x+4 = 3(x-1)^2+x+1$，所以存在實數 $a \in [0,3]$ 使得

$$f(x) = a(x-1)^2+x+1$$

這表示 $f(3) = 4a+4$ 而 $f(11) = 100a+12$，兩者皆爲 a 的遞增函數。

現在，由於 $a \in [0,3]$，$f(3) \in [4,16]$，而其中最大的質數爲 13，此時 $a = 9/4$ 而 $f(11) = 237$。

選題者註：從 2010 AIME Part 1 P6 改編而來，原題是兩條在頂點相切的二次函數曲線。

組題者註：原改題爲給定 $f(3) = 11$ 時求 $f(11)$，因挪至 APMO Pre2 而改，並拔掉一開始的二次條件。

Marking scheme

問題三. 自然數 x 以十進制表示時，各位數字的乘積等於 $x^2-20x-88$。試求所有滿足以上條件的 x。

解. 唯一可能的 x 爲 24。

假設 x 的十進位表示式是 $\sum_{i=0}^{n} a_i$，則我們有

$$x^2-20x-88=\prod_{i=0}^{n} a_i = a_n \times \prod_{i=0}^{n-1} a_i \le a_n \times 10^n \le \sum_{i=0}^{n} a_i 10^i = x,$$

從而 $1 \le x \le 24$。又由於此不等式的等號不成立，故 $10 \le x \le 24$。考慮兩種情況：

1. $10 \le x \le 19$：則 $x^2-20x-88=x-10$，也就是 $x^2-21x-78=0$。但末式無整數解，矛盾。
2. $20 \le x \le 24$：則 $x^2-20x-88=2(x-20)$，也就是 $x^2-22x-48=0$. 末式的解爲 $x=2$ 與 $x=24$，故 x 的唯一可能值爲 24.

Marking scheme

問題四. 銳角三角形 ABC 中 $\angle B > \angle C$，點 I 爲其內心，R 爲其外接圓半徑，而 D 爲 A 點在 ABC 上的垂足。點 K 落於直線 AD 上，使得 $AK = 2R$，且 D 在 A 與 K 之間。證明：

$$\angle KID = \frac{\angle B - \angle C}{2}.$$

解. Denote by A' the antipode of A with respect to the circumcircle (O) of triangle ABC. In this case, triangle AKA' is isosceles and since the cevians AH and AO are isogonal with respect to the angle $\angle BAC$ we deduce that I lies on the line bisector AM of the segment $A'K$ and moreover, the midpoint M of $A'K$ is the midpoint of the small arc BC. Since $\angle DAI = \angle DAO/2 = (B-C)/2$, it is suffice to prove that $\angle KID = \angle DAI$, which is equivalent with the fact that the line KI is tangenct to the circumcircle of triangle DAI at I. In this case, we will resume to proving that $KA \cdot KD = KI^2$, which will yield our conclusion.

Now, since

$$\begin{aligned}
KI^2 &= AK^2 + AI^2 - 2AI \cdot AK \cdot \cos\frac{B-C}{2} \\
&= 4R^2 + \frac{r^2}{\sin^2\frac{A}{2}} - \frac{4Rr\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}} \\
&= 4R^2 + \frac{r^2bc}{(p-b)(p-c)} - \frac{4Rr(b+c)}{a} \\
&= 4R^2 + \frac{bc(p-a)}{p} - \frac{4Rr(b+c)}{a} \\
&= 4R^2 - \frac{4pRr(b+c) - abc(p-a)}{ap} \\
&= 4R^2 - \frac{4RS}{a} = 2R(2R - h_a) = KA \cdot KD.
\end{aligned}$$

This shows $KA \cdot KD = KI^2$ and completes the proof.

Marking scheme

問題五. 一個正五邊形的五個頂點各被賦予一個整數，使得所有頂點的數字總和大於零。若連續三個頂點的數字依序爲 x、y 和 z，且 $y < 0$，則我們可以對其進行以下操作：將 x、y 和 z 分別改爲 $x+y$、$-y$ 和 $z+y$。只要五個頂點中任一頂點的數字小於零，我們便會持續進行操作。試問：以上操作是否必然只能操作有限次？

解. The algorithm always stops. Let $S = \sum x_i > 0$ and consider the function

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - x_{i+2})^2, x_6 = x_1, x_7 = x_2.$$

Clearly $f > 0$ always and f is integer valued. Suppose, WLOG, that $y = x_4 < 0$. Then $f_{\text{new}} - f_{\text{old}} = 2Sx_4 < 0$ since $S > 0$. Thus if the algorithm does not stop, we can find an infinite decreasing sequence of nonnegative integers $f_0 > f_1 > f_2 > \cdots$. This is impossible, so the algorithm must stop.

Marking scheme