

國立嘉科實驗高級中學

113學年度國中部教師甄選

試題公告

數學科 試題

作答注意事項

1. 本試題共兩部分：選擇題及綜合題，共計 100 分。
2. 選擇題請用 2B 軟心鉛筆在答案卡劃記，綜合題限用藍色、黑色原子筆或鋼筆在答案本上作答，但繪圖時得使用黑色鉛筆。
3. 本科不可以使用電子計算器。

試題公告

一、選擇題（每題 4 分，共 20 分）

1. 設實數 x 、 y 滿足 $x^2 + \sqrt{3}y = 4$ ， $y^2 + \sqrt{3}x = 4$ ， $x \neq y$ 。則 $\frac{y}{x} + \frac{x}{y}$ 的值

是下列哪一個選項？

- (A) $\frac{3}{2}$
(B) $-\frac{7}{3}$
(C) $\frac{9}{4}$
(D) -5

2. 線段 \overline{AB} 把一個正方形分割成兩個多邊形（點 A 和點 B 在正方形的邊上），每個多邊形都有內切圓，其中一個內切圓的半徑為 6，而另一個內切圓的半徑大於 6。問：正方形的邊長與兩倍線段 \overline{AB} 的長度之差為下列哪一個選項。

- (A) 12
(B) $10\sqrt{2}$
(C) 10
(D) $18 - 2\sqrt{3}$

3. 設三角形 ABC 為銳角三角形， h_b, h_c 分別表 $\overline{AC}, \overline{AB}$ 邊上的高。已知 $\overline{BC} = 10$ ，在下列四種 h_b, h_c 的組合中，何者所決定的三角形 ABC 面積最大？

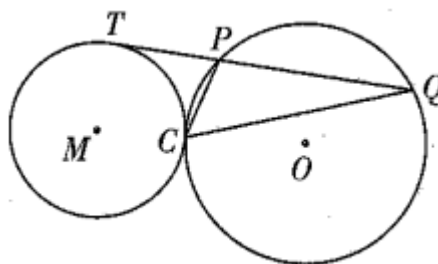
- (A) $h_b = 10, h_c = 9$
(B) $h_b = 9, h_c = 9$
(C) $h_b = 9, h_c = 8$
(D) $h_b = 8, h_c = 8$

4. 嘉實對 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 這 9 個整數進行了以下的操作：首先他先任取其中兩個數 a_1, a_2 ，求其算術平均數 m_1 ，再從剩餘的數中任取出一個數 a_3 ，並求出 a_3 與 m_1 的算術平均數而得 m_2 （即 $m_2 = (a_3 + m_1)/2$ ）。依此類推，經過 8 次的操作，可將這 9 個數全部使用完畢，並得到 m_8 ，求 m_8 的最大值？

- (A) 5
(B) $2049/256$
(C) $1025/128$
(D) $513/64$

試題公告

5. 如圖，圓 M 與圓 O 外切於點 C ，圓 M 與圓 O 的半徑分別為 7、9。直線 TPQ 與圓 M 切於點 T ，與圓 O 交於點 P 、 Q 。求 $\frac{\overline{CQ} - \overline{CP}}{\overline{PQ}}$ 的值為下列哪一個選項？



- (A) $\frac{3}{4}$
 (B) $\frac{1}{2}$
 (C) $\frac{2}{5}$
 (D) $\frac{5}{6}$

二、綜合題

(一) 填充題 (每題 7 分，共 42 分)

1. 已知二次函數 $y = x^2 + 2x - 3$ 的圖形與 x 軸交於點 $A(x_1, 0)$ 、 $B(x_2, 0)$ ，其中 $x_1 > x_2$ 。設 $Q(2, y_0)$ 為 $y = x^2 + 2x - 3$ 上的一點，在此二次函數的對稱軸上找一點 P ，使得 $\overline{PA} + \overline{PQ}$ 的值最小，則 P 點坐標為何？

2. 設 $f(x) = 2 \cos^2 x + \sin 2x - 2 \sin 2x \cos 2x$ ， $0 \leq x \leq \pi$ ，求 $f(x)$ 的最小值。

3. 在四邊形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{BC} = 8$ ， $\overline{CD} = 12$ ， $\overline{AD} = 10$ ， $\angle A = \angle B = 60^\circ$ ，則 $\overline{AB} = ?$

4. 有一場有趣的數學遊戲在兩位非常聰明的學生甲、乙之間進行。首先，裁判在黑板寫出正整數 $2, 3, \dots, 2024$ ，然後隨意擦去一個數，接下來由甲、乙兩人輪流擦去其中的一個數(即甲先擦去其中的一個數，然後乙再擦去的一個數， \dots ，如此下去)。若最後剩下的兩個數互質，則判乙勝；否則，判甲勝。按照這種遊戲規則，求乙勝的機率？

5. 設 n 為正整數，定義函數 $S(n)$ 表示 n 的各位數字的和，例如 $S(375) = 3 + 7 + 5 = 15, S(3) = 3$ 。試求滿足 $S(S(n)) = 2$ ，且 n 的各位數字均不為 0 的正整數 n 共有幾個？

試題公告

6. 已知 A, B, C, D 四個人，每人均恰會中文、英文、日文、法文、義大利文這五種語言中的其中三種，每人會的語言可能不盡相同，且這五種語言外的其它語言他們也都不懂。求這四個人無法使用一個共同語言溝通的情況有幾種可能？

(二)計算題 (共 18 分)

已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係式：
$$\begin{cases} a_1 = 1, \\ a_{n+1} = 2 + \frac{1}{a_n}, n \geq 1 \end{cases}。$$

設 $a_n = \frac{\alpha_n}{\beta_n}$ ，其中 α_n, β_n 為互質的兩正整數。

(1) 試證明對所有的正整數 n ， α_n, β_n 均為奇數。(7 分)

(2) 試證明 $\langle a_n \rangle$ 為收斂數列，並求其收斂值。(證明 8 分，收斂值 3 分)

試題公告

(三)申論題 (共 20 分)

現行 108 課綱注重素養導向，除了培養學生具備相對應的知識與能力外，更是期待能夠將所學作實際應用。請從測量的觀點，設計情境題，使得在不同情況下，可以利用下列定理當工具進行實測。

定理一：相似三角形性質

定理二：畢氏定理

定理三：餘弦定理