臺北區公立高中九十五學年度第一學期
大學入學第一次指定考科聯合模擬考

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

題型題數：單一選擇題 3 題，多重選擇題 3 題，選填題第 A 至 F 題共 6 題。

作答方式：．用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正液。

作答說明：在答案卡適當的位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

㈠填答選擇題時，只用 1，2，3，4，5 等五個格子，而不需要用到 －，±，以及 6，7，8，9，0 等格子。

例：若第 1 題的選項為(1) 3　(2) 5　(3) 7　(4) 9　(5) 11，而正確的答案為 7〔亦即選項(3)〕時，考生要在答案卡第 1 列的 $\overset{3}{\square}$ 劃記（注意不是 7），如：

解答欄												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

例：若多重選擇題第 10 題的正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡第 10 列的 $\overset{1}{\square}$ 與 $\overset{3}{\square}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
10	■	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

㈡選填題的題號是 A，B，C，…，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡第 18 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\overset{8}{\square}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡第 20 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 21 列的 $\overset{7}{\square}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的數值

祝考試順利

第壹部分：選擇題（占 78 分）

一、單一選擇題（18%）

說明：第 1 至 3 題為單選題，每題選出一個最適當的選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題答對得 6 分，答錯或劃記多於一個選項者倒扣 2 分，倒扣到本大題之實得分數為零為止。未作答者，不給分亦不倒扣分數。

1. 設空間中三平面爲E_1：$2006x+10y+17z=209$，E_2：$95x+2y+8z=112$，
E_3：$[2006\times3+95\times(-4)]x+[10\times3+2\times(-4)]y+[17\times3+8\times(-4)]z=169$，
則此三平面的關係爲下列何者？
(1)相異三平面兩兩相交於一直線，但三直線平行不共點
(2)相異三平面相交於一直線
(3)二平面平行，另一平面與此二平面各交於一直線
(4)二平面重合，另一平面與此重合的二平面交於一直線

2. 定義$n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times3\times2\times1$，$n$爲正整數，試求$1!+2!+3!+4!+\cdots+2006!$除以 48 的餘數爲
(1) 0　(2) 3　(3) 9　(4) 38

3. 複數平面上$A(z_1)$、$B(z_2)$、$C(z_3)$三點，已知$|z_1|=5$，且z_1在第一象限，又z_2爲z_1的共軛複數，$z_3=\dfrac{1}{z_1}$，則在複數平面上$\triangle ABC$的最大面積爲下列何者？
(1) 12　(2) 15　(3) 16　(4) 18

二、多重選擇題（24%）

說明：第 4 至 6 題，每題各有 5 個選項，其中至少有一個是正確的。選出正確選項，劃記在答案卡之「解答欄」。每題 8 分，各選項獨立計分，每答對一個選項，可得 1.6 分，每答錯一個選項，倒扣 1.6 分，完全答對得 8 分；整題未作答者，不給分亦不倒扣分數。在備答選項以外之區域劃記，一律倒扣 1.6 分。倒扣到本大題之實得分數為零為止。

4. 下列敘述何者正確？
(1)整係數n次多項式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$n$爲正整數，若$a\mid a_n$且$b\mid a_0$，則$ax-b\mid f(x)$
(2)設a、b、c、d皆爲實數，$i=\sqrt{-1}$，若$a+bi=c+di$，則$a=c$且$b=d$
(3)設a、b皆爲實數，則$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$
(4)設z爲複數，$\bar{z}$爲z的共軛複數，則$z\cdot\bar{z}=|\bar{z}|^2$
(5)實係數n次多項式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$，$n$爲正整數，若$f(x)=0$在$a$，$b$之間有實根，則$f(a)\cdot f(b)<0$

5. 設 x 為正數且 $0<a<1$，則下列何者正確？

⑴ $y=a^x$ 的圖形與 $y=\log_a x$ 的圖形之交點必在直線 $y=x$ 上

⑵若 $0<x<1$，$0<a<b<1$，則 $\log_a x>\log_b x$

⑶若 $x_2>x_1>0$，則 $\log_a \dfrac{x_1+x_2}{2}<\dfrac{1}{2}(\log_a x_1+\log_a x_2)$

⑷若 $x_2>x_1>0$，則 $\log_a \dfrac{x_1+x_2}{2}<\dfrac{1}{2}\log_a \dfrac{x_1{}^2+x_2{}^2}{2}$

⑸設 $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$，則 $\dfrac{1}{2}\log_a 2<\log_a(\sin\theta+\cos\theta)<0$

6. 設空間中三點 $P(3,4,2)$，$Q(4,2,4)$，$R(-1,6,6)$，在 xy 平面上有一圓 C，圓 C 的圓心在原點，且半徑為 3，則下列何者正確？

⑴ $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}>0$

⑵ $\triangle PQR$ 的面積為 9

⑶在空間坐標中，圓 C 的方程式為 $x^2+y^2=9$

⑷ $\overrightarrow{QR}$ 在 $\overrightarrow{QP}$ 上的正射影長為 6

⑸ P 點到圓 C 的最短距離為 $2\sqrt{2}$

三、選填題（36%）

說明：A 至 F 各題為選填題，劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（⑦-㉑）內。每一題完全答對得 6 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

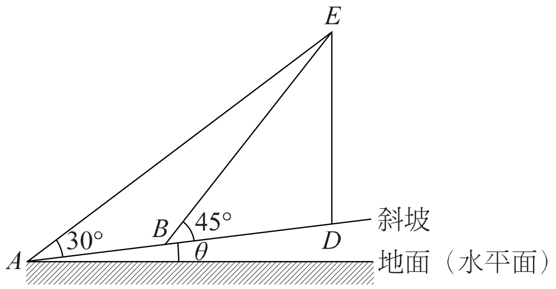
A. 從自然數 1、2、3、4、……中，刪去 2 或 5 的倍數之後，所剩下的數由小到大形成一新的數列為 $<a_n>=<1、3、7、……>$，試求此數列的第 100 項，即 $a_{100}=$ ⑦⑧⑨ 。

B. 空間中 A、B 兩點皆在第一卦限（x、y、z 坐標皆為正數），且 $|\overrightarrow{AB}|=9$，若 $\overrightarrow{AB}$ 在 yz 平面上的正射影長為 8，在 xz 平面上的正射影長為 $\sqrt{62}$，求 $\overrightarrow{AB}$ 在 xy 平面上的正射影長 ⑩ 。

C. 設函數 $f(x)=x^2+4x-18$，若 $f(f(x))=f(x)$ 的四根為 α、β、γ、δ，且 $\alpha<\beta<\gamma<\delta$，試求 $\alpha\cdot\beta+\gamma\cdot\delta=$ ⑪⑫ 。

D. 科學家將某種細菌放置在不利於它生長的環境之下，觀察其繁殖情形，發現 t 小時之後細菌總個數為 $n\cdot(1+2^{kt})$，其中 k 為常數，n 為細菌原有個數。已知此種細菌 1 小時之後的總個數為 40，2 小時之後的總個數為 52，則 3 小時之後的總個數為 ⑬⑭ 。

E. 如右圖，有一斜坡與地面的夾角爲θ，且 $\sin\theta=\dfrac{1}{7}$，斜坡上有一大樓$\overline{DE}$，直線DE與地面（水平面）垂直，今於斜坡上一點A，測得大樓屋頂E的仰角爲 30°，之後沿斜坡向大樓前進48公尺至B點，再測得大樓屋頂E的仰角爲 45°，試求大樓高 ⑮⑯ + ⑰⑱ $\sqrt{3}$ 公尺。（化至最簡根式）



F. 設空間中有一圓，此圓通過$A(12,0,0)$，$B(0,12,0)$，$C(0,0,6)$三點，試求此圓之圓心坐標爲 (⑲，⑳，㉑) 。

第貳部分：非選擇題（占 22 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號（一、二）與子題號（⑴、⑵、⑶），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。每題配分標於題末。

一、空間中二點$P(-1,2,1)$，$Q(1,-3,-1)$在平面$E：x+2y-z=20$上之投影點分別爲R、S，則

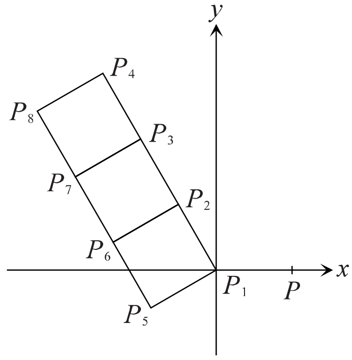
⑴四邊形$PRSQ$所在的平面方程式？（4 分）

⑵四邊形$PRSQ$的面積？（6 分）

二、如右圖，在複數坐標平面上，$P_1P_2P_6P_5$、$P_2P_3P_7P_6$、$P_3P_4P_8P_7$皆是邊長爲 1 的正方形，且P_1爲原點，已知$\angle PP_1P_2=120°$；若將P_k，$k=2,3,\cdots,8$，寫成極式$r_k\cdot(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$，$r_k>0$，$0\le\theta_k<2\pi$，$i=\sqrt{-1}$，則

⑴試求$\sum_{k=2}^{8}\theta_k=$？（6 分）

⑵試將P_8以複數$a+bi$表示，其中a，b爲實數？（6 分）



參考公式及可能用到的數值：

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
2. 平面上兩點 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
3. 通過 $P_1(x_1,y_1)$ 與 $P_2(x_2,y_2)$ 的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，$x_2\neq x_1$
4. 等差數列的前 n 項之和 $S_n=\dfrac{n\cdot(a_1+a_n)}{2}$
5. 三角函數的和角公式：
   $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$
   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$
   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$
6. 正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$
   餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$
7. 棣美弗定理：設 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，則 $z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$，$n$ 為一正整數
8. $\log 2\approx 0.3010$；$\log 3\approx 0.4771$；$\log 7\approx 0.8451$
9. $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\theta$
10. $P(x_0,y_0)$ 到直線 $ax+by+c=0$ 的距離 $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$