

# 國立東石高級中學 112 學年度第一次教師甄選 數學科試題

## 一、填充題(每格 5 分，共 80 分)

1. 設向量  $\vec{a}_n = (\cos \frac{n\pi}{6}, \sin \frac{n\pi}{6})$ ，向量  $\vec{b}$  的長度  $|\vec{b}| = 2$ ，令  $\sum_{n=0}^{10} |\vec{a}_n + \vec{b}|^2$  的最大值為  $S$ ，最小值為  $T$ ，求數對  $(S, T) =$  \_\_\_\_\_。
2. 給定一擺線之參數式  $\begin{cases} x = \theta - \sin \theta \\ y = 1 - \cos \theta \end{cases}$ ， $\theta$  為實數，求其擺線圖形在完整一個週期的弧線與  $x$  軸所圍成封閉區間的面積 = \_\_\_\_\_。
3. 設  $f(a, b) = (a + b - 2)^2 + (a + 2b - 3)^2 + (a + 3b - 5)^2 + (a + 4b - 8)^2$ ，當  $f(a, b)$  有最小值時，求數對  $(a, b) =$  \_\_\_\_\_。
4. 設  $a = \cos \frac{\pi}{3}$ ，求行列式  $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 3 & 2a+1 & a^2+2a & 3a^2 \\ 3 & a+2 & 2a+1 & 3a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$  之值 = \_\_\_\_\_。
5. 求不等式  $5 \leq x + y + z \leq 12$  之非負整數解，共有 \_\_\_\_\_ 組。
6. 令  $a_n$  為  $(3 - \sqrt{x})^n$ ，展開式中  $x$  項的係數，求極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3^2}{a_2} + \frac{3^3}{a_3} + \frac{3^4}{a_4} + \dots + \frac{3^n}{a_n} \right)$  之值 = \_\_\_\_\_。
7. 設  $0 \leq \theta < 2\pi$ ，令  $t = \frac{2\sin\theta+1}{3+\cos\theta}$ ，求  $t$  的範圍 = \_\_\_\_\_。
8. 有一個袋子，裡面裝了 2 顆紅球，3 顆白球，4 顆黃球，5 顆黑球(球的材質、大小都相同)，將袋中的球取出，一次取一顆，取後不放回，求白球先被取完之機率 = \_\_\_\_\_。
9. 給定空間中一個正四面體  $ABCD$ ， $E, F, G, H$  皆為邊長的分點，其中  $\overline{BE} = \overline{EF} = \overline{FA}$ ， $\overline{CG} = \frac{1}{3}\overline{BC}$ ， $H$  為  $\overline{CD}$  之中點，試求  $\overline{HF}$  與  $\overline{GE}$  之夾角 = \_\_\_\_\_。
10. 將  $(a - 2b + 3c - 4d)^{20} - (a + 2b - 3c - 4d)^{20}$  展開後合併整理，最後會有 \_\_\_\_\_ 種不同類項。
11. 給定空間中一封閉區面  $S: (2x + 3y + z)^2 + (3x - 2y + z)^2 + (x + 3y + 2z)^2 = 1$ ，求所圍出的體積 = \_\_\_\_\_。
12. 試化簡  $\sum_{k=0}^{100} \left(x + \frac{k}{100}\right)^2 \binom{100}{k} x^k (1-x)^{100-k} =$  \_\_\_\_\_。
13. 當  $x > 0, y > 0$  且  $\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2y} = 1$ ，試求  $2x + y$  的最小值 = \_\_\_\_\_。
14.  $\Delta ABC$  中，設  $H$  為垂心， $O$  為外心，已知  $\overline{AH} = \frac{11}{15}\overline{AB} + \frac{1}{12}\overline{AC}$  且  $\overline{AO} = \alpha\overline{AB} + \beta\overline{AC}$ ，求數對  $(\alpha, \beta) =$  \_\_\_\_\_。
15. 求  $\sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7} =$  \_\_\_\_\_。
16. 將 2 顆綠色珠子，4 顆紅色珠子，3 顆藍色珠子串成一個項圈，試求共有幾種不同方法(假設珠子大小一樣) = \_\_\_\_\_。

## 二、計算題(需有計算過程)(每題 10 分，共 20 分)

1. 求積分  $\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$  \_\_\_\_\_。
2. 已知遞迴數列滿足， $a_1 = \frac{1}{2}$ ， $a_{n+1} = \frac{a_n+3}{2a_n-4}$ ，求一般式  $a_n =$  \_\_\_\_\_。(以  $n$  表示)