$$\overline{MN}^2=\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\right)^2+1^2-2\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times1\times\cos\left(30^\circ+\angle BAC+30^\circ\right)$$

$$=\frac{7}{3}+1-2\times\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}\times\left[\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{7}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{\sqrt{7}}\right]=\frac{13}{3}$$

10. 坐標空間中有方向向量為$(1,-2,2)$的直線L、平面$E_1:2x+3y+6z=10$與平面$E_2:2x+3y+6z=-4$。則L被E_1、E_2所截線段的長度為________。

（化為最簡分數）

【112 分科測驗數甲】

答：$\frac{21}{4}$

解：$d\left(E_1,E_2\right)\times\left|\sec\theta\right|=\frac{\left|10-(-4)\right|}{7}\times\left|\frac{3\times7}{(1,2,3)\cdot(2,3,6)}\right|=2\times\frac{21}{8}=\frac{21}{4}$

11. 百貨公司舉辦父親節抽牌送獎品活動，規則如下：

主辦單位準備編號 1、2、…、9 的牌卡十張，

其中編號 8 的牌卡有兩張，其他編號的牌卡均只有一張。

從這十張牌隨機抽出四張，且抽出不放回，依抽出順序由左至右排成一個四位數。

若排成的四位數滿足下列任一個條件，就可獲得獎品：

(1)此四位數大於 6400

(2)此四位數含有兩個數字 8

例如：若抽出四張牌編號依序為 5、8、2、8，則此四位數為 5828，可獲得獎品。

依上述規則，共有________個抽出排成的四位數可獲得獎品。【112 分科測驗數甲】

答：1554

解：$\boxed{1}\square\square\square$ ~ $\boxed{5}\square\square\square$可得獎（必含88）$\Rightarrow C_1^7\times\frac{3!}{2!}\times5=105$

$\boxed{6}\boxed{1}\square\square$ ~ $\boxed{6}\boxed{3}\square\square$可得獎（必含88）$\Rightarrow1\times3=3$

$\boxed{6}\boxed{4}\square\square$、$\boxed{6}\boxed{5}\square\square$、$\boxed{6}\boxed{7}\square\square$、$\boxed{6}\boxed{9}\square\square$得獎$\begin{cases}\text{含}88\Rightarrow1\times4=4\\\text{不含}88\Rightarrow C_2^7\times2!\times4=168\end{cases}$

$\boxed{6}\boxed{8}\square\square$必得獎$\Rightarrow C_2^8\times2!=56$

$\boxed{7}\square\square\square$、$\boxed{9}\square\square\square$必得獎$\begin{cases}\text{含}88\Rightarrow C_1^7\times\frac{3!}{2!}\times2=42\\\text{不含}88\Rightarrow C_3^8\times3!\times2=672\end{cases}$

$\boxed{8}\square\square\square$必得獎$\Rightarrow C_3^9\times3!=504$

合計1554種

第貳部分：混合題或非選擇題（佔 24 分）

12-14 題為題組

設 a,b 為實數，並設 O 為坐標平面的原點。已知二次函數 $f(x)=ax^2$ 的圖形與圓 $\Omega: x^2+y^2-3y+b=0$ 皆通過點 $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$，並令點 C 為 Ω 的圓心。根據上述，試回答下列問題。

12. 試求向量 $\overrightarrow{CO}$ 與 $\overrightarrow{CP}$ 夾角的餘弦值。　　【112 分科測驗數甲】

答：$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

解：$y=ax^2$，$x^2+y^2-3y+b=0$，皆過 $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$ $\Rightarrow a=\frac{1}{2}$，$b=\frac{1}{4}$

$\Omega:(x-0)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=2 \Rightarrow$ 圓心 $C\left(0,\frac{3}{2}\right)$

$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\left(0,-\frac{3}{2}\right)\cdot(1,-1)}{\frac{3}{2}\times\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

13. 試證明 $y=f(x)$ 圖形與 Ω 在 P 點有共同的切線。　　【112 分科測驗數甲】

證：$y=\frac{1}{2}x^2$ 過 $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 之切線為 $\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot x \Rightarrow x-y=\frac{1}{2}$

$x^2+y^2-3y+\frac{1}{4}=0$，過 $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$ 之切線為 $x+\frac{1}{2}y-\frac{3}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}=0$

$\Rightarrow x-y=\frac{1}{2}$，故切線相同，得證

14. 試求 $y=f(x)$ 圖形上方與 Ω 下半圓弧所圍區域的面積。　　【112 分科測驗數甲】

答：$\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}$

解：$2\int_0^1\left[\frac{3}{2}-\sqrt{2-x^2}-\frac{1}{2}x^2\right]dx=\int_0^1\left[-x^2+3-2\sqrt{2-x^2}\right]dx$

$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+3x+c\right]\Big|_0^1-2\left[\frac{1}{8}\times\pi\times\left(\sqrt{2}\right)^2+\frac{1\times1}{2}\right]=\frac{5}{3}-\frac{\pi}{2}$$

15-17 題為題組

坐標平面上，設Γ為中心在原點且長軸落在y軸上的橢圓。已知對原點逆時針旋轉θ角（其中$0<\theta<\pi$）的線性變換將Γ變換到新橢圓Γ'：$40x^2+4\sqrt{5}xy+41y^2=180$，點$\left(-\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$為$\Gamma'$上離原點最遠的兩點之一。根據上述，試回答下列問題。

15. 橢圓Γ'的長軸長為________。（化為最簡根式） 【112 分科測驗數甲】

答：$2\sqrt{5}$

解：所求$=2\sqrt{\left(-\frac{5}{3}\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)^2}=2\sqrt{5}$

16. 試求Γ'短軸所在的直線方程式與短軸長。 【112 分科測驗數甲】

答：$\sqrt{5}x-2y=0$，4

解：長軸斜率$=\dfrac{\frac{2\sqrt{5}}{3}}{-\frac{5}{3}}=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，短軸斜率$=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow$短軸方程式：$\sqrt{5}x-2y=0$

$\Rightarrow$與Γ'交於$\left(\frac{4}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$，$\left(-\frac{4}{3},-\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$，短軸長$=4$

17. 已知在Γ上的一點P經由此旋轉後得到的點P'落在x軸上，且P'點的x坐標大於 0。試求P點的坐標。 【112 分科測驗數甲】

答：$P\left(\sqrt{2},-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

解：Γ'與x軸交於$\left(\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$，$\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2},0\right)$且$\cos\theta=\frac{2}{3}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

則$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{\sqrt{5}}{3}\\ -\frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{2}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{3\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$