大學入學 112 年(111 學年度)
分科測驗 數學甲試題

俞克斌老師編寫

第壹部分：選擇(填)題（佔 76 分）

一、單選題（佔 18 分）

1. 坐標平面上，一質點由點$(-3,-2)$出發，沿著向量$(a,1)$的方向移動 5 單位長之後剛好抵達x軸，其中a為正實數。試問a值等於下列哪一個選項？

(1)$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$　(2)2　(3)$\sqrt{5}$　(4)$\dfrac{\sqrt{21}}{2}$　(5)$2\sqrt{6}$　【112 分科測驗數甲】

答：(4)

解：$(-3,-2)+\dfrac{5}{\sqrt{a^2+1}}(a,1)=(x,0)\ \Rightarrow a=\pm\dfrac{\sqrt{21}}{2}$（取正）

2. 放射性物質的半衰期T定義為「每經過時間T，該物質的質量會衰退成原來的一半」。鉛製容器中有A、B兩種放射性物質，其半衰期分別為T_A、T_B。開始記錄時這兩種物質的質量相等，112 天後測量發現物質B的質量為物質A的質量的四分之一。根據上述，試問T_A、T_B滿足下列哪一個關係式？

(1)$-2+\dfrac{112}{T_A}=\dfrac{112}{T_B}$　(2)$2+\dfrac{112}{T_A}=\dfrac{112}{T_B}$

(3)$-2+\log_2\dfrac{112}{T_A}=\log_2\dfrac{112}{T_B}$　(4)$2+\log_2\dfrac{112}{T_A}=\log_2\dfrac{112}{T_B}$

(5)$2\log_2\dfrac{112}{T_A}=\log_2\dfrac{112}{T_B}$　【112 分科測驗數甲】

答：(2)

解：$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{112}{T_A}}=4\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{112}{T_B}}\ \Rightarrow\dfrac{112}{T_A}=-2+\dfrac{112}{T_B}$

3. 試問極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{n^2}\left(\sqrt{4n^2+9\times1^2}+\sqrt{4n^2+9\times2^2}+\cdots+\sqrt{4n^2+9\times(n-1)^2}\right)$ 的值可用下列哪一個定積分表示？

(1)$\int_0^3\sqrt{1+x^2}\,dx$　(2)$\int_0^3\sqrt{1+9x^2}\,dx$　(3)$\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$

(4)$\int_0^3\sqrt{4+9x^2}\,dx$　(5)$\int_0^3\sqrt{4x^2+9}\,dx$　【112 分科測驗數甲】

答：(3)

解：所求$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sqrt{4+\left(\dfrac{3k}{n}\right)^2}\right)\dfrac{3}{n}=\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$

解：所求 $=\lim\limits_{n\to\infty} 3\sum\limits_{k=1}^{n-1}\sqrt{4+9\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}\times\dfrac{1}{n}=3\int_0^1\sqrt{4+9x^2}\,dx$

令 $t=3x \Rightarrow dt=3dx$，所求 $=\int_0^3\sqrt{4+t^2}\,dt$

二、多選題（佔 40 分）

4. 設 a,b 為實數。已知四個數 $-3,-1,4,7$ 皆滿足 x 的不等式 $|x-a|\le b$，試選出正確的選項。
(1) $\sqrt{10}$ 也滿足 x 的不等式 $|x-a|\le b$
(2) $3,1,-4,-7$ 滿足 x 的不等式 $|x+a|\le b$
(3) $-\dfrac{3}{2},-\dfrac{1}{2},2,\dfrac{7}{2}$ 滿足 x 的不等式 $|x-a|\le\dfrac{b}{2}$
(4) b 可能等於 4
(5) a,b 可能相等
【112 分科測驗數甲】

答：(1)(2)

解：$-3\le x\le 7 \Rightarrow |x-2|\le 5$

則 $|x+2|\le 5 \Rightarrow -7\le x\le 3$

則 $|x-2|\le\dfrac{5}{2} \Rightarrow -\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{7}{2}$

5. 考慮實係數多項式 $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+ax+b$。已知方程式 $f(x)=0$ 有虛根 $1+2i$（其中 $i=\sqrt{-1}$），試選出正確的選項。
(1) $1-2i$ 也是 $f(x)=0$ 的根
(2) a,b 皆為正數
(3) $f'(2.1)<0$
(4) 函數 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 有局部極小值
(5) $y=f(x)$ 圖形反曲點的 x 坐標皆大於 0
【112 分科測驗數甲】

答：(1)(3)

解：$x=1+2i \Rightarrow (x-1)^2=(2i)^2 \Rightarrow x^2-2x+5=0$

$f(x)=\left(x^2-2x+5\right)\left(x^2-2x-11\right)=x^4-4x^3-2x^2+12x-55$

$f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$

$\Rightarrow f'(2.1)<0$ 且 $f(-1)$，$f(3)$ 為極小值，$f(1)$ 為極大值

$f''(x)=12x^2-24x-4=0 \Rightarrow x=\dfrac{3\pm2\sqrt{3}}{3}=$ 反曲點 x 坐標

6. 設 a,b,c,d,r,s,t 皆為實數，已知坐標空間中三個非零向量 $\overrightarrow{u}=(a,b,0)$、$\overrightarrow{v}=(c,d,0)$ 及 $\overrightarrow{w}=(r,s,t)$ 滿足內積 $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}=0$。考慮三階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b & 0\\ c & d & 0\\ r & s & t\end{bmatrix}$，試選出正確的選項。
(1) 若 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b\\ c & d\end{vmatrix}\ne 0$

(2)若 $t\neq 0$，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

(3)若存在一個向量 $\overrightarrow{w'}$ 滿足 $\overrightarrow{w'}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{w'}\cdot\overrightarrow{v}=0$ 且外積 $\overrightarrow{w'}\times\overrightarrow{w}\neq\overrightarrow{0}$，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

(4)若對任意三個實數 e,f,g，向量 (e,f,g) 都可以表示成 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ 的線性組合，

則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

(5)若行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，則 A 的行列式不等於 0　【112 分科測驗數甲】

答：(1)(4)(5)

解：(1) $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$，表 $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}\Rightarrow\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 不平行

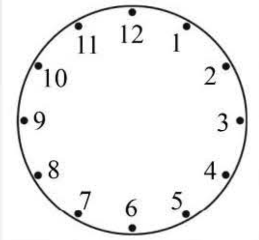
(2) $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 可能平行，且皆與 $\overrightarrow{w}$ 垂直

(3)此時必 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 平行

(4)此時 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{w}$ 可為基底向量，故 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 不平行

(5) $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 不平行，且皆與 $\overrightarrow{w}$ 垂直 $\Rightarrow$ 體積 $\neq 0$

7. 有一個依順時針方向依序標示 $1,2,\cdots,12$ 數字的圓形時鐘（如圖所示）。一開始在此時鐘「12」點鐘位置擺設一枚棋子，然後每次投擲一枚均勻銅板，依投擲結果，照以下規則移動這枚棋子的位置：



- 若出現正面，將棋子從當時位置依順時針方向移動 5 個鐘點。
- 若出現反面，將棋子從當時位置依逆時針方向移動 5 個鐘點。

例如：若投擲銅板三次均為正面，則棋子第一次移動到「5」點鐘位置、第二次移動到「10」點鐘位置，第三次移動到「3」點鐘位置。

對任一正整數 n，令隨機變數 X_n 代表依上述規則經過 n 次移動後棋子所在的點鐘位置，$P(X_n=k)$ 代表 $X_n=k$ 的機率（其中 $k=1,2,\cdots,12$），且令 $E(X_n)$ 代表 X_n 的期望值。試選出正確的選項。

(1) $E(X_1)=6$　(2) $P(X_2=12)=\dfrac{1}{4}$　(3) $P(X_8=5)\geq\dfrac{1}{2^8}$

(4) $P(X_8=4)=P(X_8=8)$　(5) $E(X_8)\leq 7$　【112 分科測驗數甲】

答：(1)(4)

解：(1) $E(X_1)=\dfrac{1}{2}\times 5+\dfrac{1}{2}\times 7=6$

(2) $P(X_2=12)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times 2!=\dfrac{1}{2}$，即一正一反

(3)(4)(5) 8 正在 4，8 反在 8，機率均為 $\dfrac{1}{2^8}$

7 正 1 反在 6，7 反 1 正在 6，機率均為 $\dfrac{8}{2^8}$

6 正 2 反在 8，6 反 2 正在 4，機率均為$\dfrac{28}{2^8}$

5 正 3 反在 10，5 反 3 正在 2，機率均為$\dfrac{56}{2^8}$

4 正 4 反在 12，機率為$\dfrac{70}{2^8}$

故$P(X_8=5)=0$，$P(X_8=4)=P(X_8=8)=\dfrac{1+28}{2^8}$

$$E(X_8)=\frac{1}{2^8}[(4+8)\times(1+28)+6\times8\times2+(10+2)\times56+12\times70]=\frac{1956}{2^8}>7$$

8. 複數平面上，設$\bar{z}$代表複數z的共軛複數，且$i=\sqrt{-1}$。試選出正確的選項。
(1)若$z=2i$，則$z^3=4i\bar{z}$
(2)若非零複數α滿足$\alpha^3=4i\bar{\alpha}$，則$|\alpha|=2$
(3)若非零複數α滿足$\alpha^3=4i\bar{\alpha}$且令$\beta=i\alpha$，則$\beta^3=4i\bar{\beta}$
(4)滿足$z^3=4i\bar{z}$的所有非零複數z中，其主輻角的最小可能值為$\dfrac{\pi}{6}$
(5)恰有 3 個相異非零複數z滿足$z^3=4i\bar{z}$ 【112 分科測驗數甲】

答：(2)(3)

解：(1)$z=2i$，$z^3=-8i$，$4i\bar{z}=(4i)(-2i)=8$

(2)$\alpha^3=4i\bar{\alpha}\Rightarrow|\alpha|^3=|4i||\bar{\alpha}|\xrightarrow{|\alpha|=|\bar{\alpha}|}|\alpha|=2$

(3)$\alpha^3=4i\bar{\alpha}\xrightarrow{\alpha=\frac{\beta}{i}}\left(\dfrac{\beta}{i}\right)^3=4i\left(\dfrac{\bar{\beta}}{-i}\right)\Rightarrow\beta^3=4i\bar{\beta}$

(4)(5) $Arg(z)=\theta$，$Arg(\bar{z})=360°-\theta$

$\Rightarrow3\theta=90°+(360°-\theta)+360°k\ \Rightarrow4\theta=90°+360°(k+1)$

$\Rightarrow\theta=22.5°+90°(k+1)$，故有 4 解

三、選填題（佔 18 分）

9. 已知平面上直角ΔABC的三邊長$\overline{AB}=\sqrt{7}$、$\overline{AC}=\sqrt{3}$、$\overline{BC}=2$。若分別以$\overline{AB}$與$\overline{AC}$為底邊在ΔABC的外部作頂角等於$120°$的等腰三角形ΔMAB與ΔNAC，
則$\overline{MN}^2=$＿＿＿＿。（化為最簡分數） 【112 分科測驗數甲】

答：$\dfrac{13}{3}$

解：$\overline{MA}=\overline{MB}=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$，$\overline{NA}=\overline{NC}=1$，$\angle MAB=\angle MBA=\angle NAC=\angle NCA=30°$