

# 國立屏東女子高級中學 112 學年度代理教師甄選數學科題目卷

一、單一選擇題：每題全對得5分。共10分。

1、已知空間中一平面  $E$  與直圓錐面截出半徑為  $r$  的圓，且直圓錐面母線與軸所夾的銳夾角  $\theta$ ，則下列哪個選項為頂點到圓上任意一點的距離？

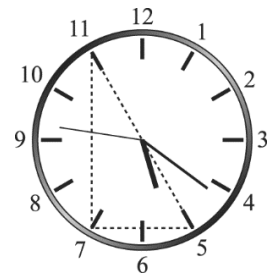
- (A)  $\frac{r}{\sin \theta}$
- (B)  $\frac{r}{\cos \theta}$
- (C)  $\frac{r}{\tan \theta}$
- (D)  $r \tan \theta$
- (E)  $\frac{\tan \theta}{r}$

2、若  $A = \begin{bmatrix} x & z \\ y & u \end{bmatrix}$  為轉移矩陣，且  $\det(2A) = 2.4$ ，則  $y+z$  之值為何？

- (A)  $-0.2$
- (B)  $0.4$
- (C)  $0.6$
- (D)  $0.8$
- (E)  $1.2$ 。

二、多重選擇題：每題全對得6分，答錯1個選項得4分，答錯2個選項得2分。共36分。

1、在鐘錶的 12 個等分刻度中，以線段連接其中 3 個刻度得一個三角形，如右圖為連接刻度 5、7、11 的三角形。若  $S$  為此試驗所有三角形的樣本空間， $A$ 、 $B$ 、 $C$  分別表示銳角三角形、直角三角形、鈍角三角形的事件，則下列哪些選項正確？



- (A)  $A$ 、 $C$  為互斥事件
- (B)  $B$  為本試驗的基本事件
- (C) 樣本空間  $S$  的樣本點有  $\frac{P_3^{12}}{3!}$  個
- (D) 事件  $B$  的樣本點有 60 個
- (E) 若  $a$ 、 $b$ 、 $c$  分別表示  $A$ 、 $B$ 、 $C$  樣本點的個數，則  $a=b=c$

2、請問下列選項中哪些數值  $a$  會使得  $x$  的方程式  $\log a - \log x = \log(a-x)$  有兩相異實數解？

- (A)  $a = 1$
- (B)  $a = \frac{1}{3}\pi$
- (C)  $a = \frac{1}{2}\pi$
- (D)  $a = \pi$
- (E)  $a = \frac{3}{2}\pi$ 。

3、設  $\vec{u} = (a, b, 0)$ ， $\vec{v} = (c, d, 3)$ ，其中  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 3$ ，則下列選項哪些是正確的？

- (1)  $\vec{u}$  與  $z$  軸垂直
- (2)  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  的最大值為  $\sqrt{3}$
- (3)  $\vec{u}$ 、 $\vec{v}$  的夾角最大值為  $135^\circ$
- (4)  $ad - bc$  的值可能為 2
- (5)  $|\vec{u} \times \vec{v}|$  的最大值  $2\sqrt{3}$

- 4、設 $A(1,2)$ 、 $B(4,3)$ 、 $C(2,-1)$ 為坐標平面上三點，且 $P$ 點滿足 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，則下列敘述何者正確？
- (A)  $\triangle ABC$ 面積為10  
 (B) 若 $-1 \leq x \leq 2$ 、 $1 \leq y \leq 3$ ，則 $P$ 點所形成區域的面積為60  
 (C) 若 $P$ 點為 $\triangle ABC$ 的重心，則 $x = y = \frac{1}{3}$   
 (D) 若 $x = 2$ 、 $y = 3$ ，則四邊形 $ABPC$ 的面積為 $\triangle ABC$ 面積的5倍  
 (E) 若 $x = \cos\theta$ 、 $y = \sin\theta$ ， $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ，則 $P$ 點所成的圖形為圓

- 5、已知二階方陣 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 滿足 $A \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ，下列敘述哪些是正確的？

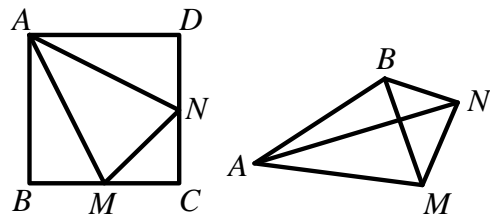
- (A)  $a+b+c+d=0$   
 (B)  $A$ 可能是一轉移矩陣  
 (C)  $A$ 可能是一旋轉方陣  
 (D)  $A$ 可能是一水平推移矩陣  
 (E)  $A$ 可能是一鏡射矩陣

- 6、對數學函數圖形深感興趣的阿蓉，在高二學習完週期性函數圖形 $y = \sin x$ 後，連同高一學習過的函數圖形 $y = x$ 、 $y = x^2$ 、 $y = x^3$ 一起繪製在方格紙上。觀察四個圖形的關係，試問以下那些敘述是正確的？

- (A) 函數圖形 $y = \sin x$ 與 $y = x^2$ 相交於2點  
 (B) 函數圖形 $y = \sin x$ 與 $y = x^3$ 相交於3點  
 (C) 函數圖形 $y = \sin x$ 與 $y = x$ 相交於3點  
 (D)  $x > 1$ 時， $\sin x < x^2$   
 (E)  $0 < x < 1$ 時， $\sin x > x^2$

三、填充題：每題全對得5分。共25分。

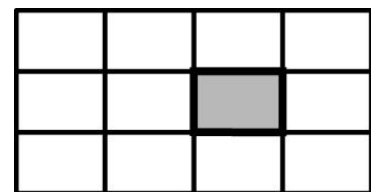
- 1、如圖，一張邊長為2的正方形紙 $ABCD$ ， $M$ 、 $N$ 分別為 $\overline{BC}$ 與 $\overline{CD}$ 的中點，今沿著 $\overline{AM}$ 、 $\overline{AN}$ 與 $\overline{MN}$ 摺起，使 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 三點重合，若平面 $ABM$ 與平面 $AMN$ 的銳角夾角為 $\theta$ ，試求 $\sin\theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



- 2、已知 $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$ 均為實數，且 $a^2 + b^2 = 8$ ， $c^2 + d^2 = 24$ ，求 $\begin{vmatrix} a & b & 1 \\ c & 0 & d \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 的最小值為\_\_\_\_\_。

- 3、空間中，以 $\overline{AB}$ 為共同邊的兩正方形 $ABCD$ 、 $ABEF$ ，其邊長皆為4。已知內積 $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF} = 11$ ，則 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

- 4、1968年美國海軍潛艇天蠍號（USS Scorpion）在西班牙與葡萄牙的大西洋海域失蹤，面對茫茫大海，如何搜尋被擊沉的潛艇是件棘手的工作。後來，由「貝氏搜尋理論」專家-約翰克萊文（J. Craven）博士訪談了經驗豐富的潛艇指揮官與專家，建立天蠍號可能沉沒地點的假設，並從先前的航跡圖，確認出潛艇最有可能掉落的海域。接著，克萊文將這個海域劃分成由許多矩形所成的網格。開始調查潛艇掉落在每個方格的機率，每次只搜尋掉落機率最高的方格。以下我們進行事件與數據的假設：



- (1) 每次只搜尋潛艇掉落機率最高的區域(即右圖中鋪色方格)，白色方格區域本次不進行搜尋。  
 (2) 設 $A$ 表示潛艇掉落於鋪色方格的事件， $B$ 表示潛艇被尋獲的事件。  
 (3) 已知本次潛艇掉落於鋪色方格的機率值為0.7，且已知當潛艇掉落於此方格時，潛艇被尋獲的機率為0.9。

「貝氏搜尋理論」專家-約翰克萊文（J. Craven）博士聲稱「搜尋鋪色區域後，在找不到潛艇的條件下，潛艇落在鋪色區域的機率將會降低；同時，潛艇落在其他方格的機率就會有所提高，接著只要依序繼續尋找機率最高的另一個方格，如此反覆循環，直到尋獲到殘骸為止。」後來，「貝氏搜索理論」也就成為「大海撈針」時用來協助搜尋、探索落海物件時的有效工具。試問：在本題中，搜尋鋪色區域後，已知在找不到潛艇的條件下，潛艇落在鋪色區域的機率會變為\_\_\_\_\_。

5、設  $L$  為平面上過原點的一直線，已知點  $P(7, -1)$  對  $L$  作鏡射變換後得到點  $Q(1, 7)$ ，則此鏡射變換對應的二階方陣為  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，求  $d = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

四、計算證明題：19 分

1、證明算幾不等式(5 分)

若  $a, b$  為非負實數，則  $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ ，且等號成立於  $a=b$  時。

2、證明餘弦定理(6 分)

若  $a, b$  和  $c$  分別表  $\triangle ABC$  三內角  $\angle A, \angle B$  和  $\angle C$  的對邊長，則  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 。

3、證明柯西不等式(實數形式)(8 分)

對於任意實數  $a_1, a_2, b_1, b_2$ ，不等式  $(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2)^2$  恆成立，且等號成立於  $a_1b_2 = a_2b_1$  時。

五、多元選修「數學素養探究」課程設計：10 分

請參閱下方資料，設計一門高一上學期多元選修「數學素養探究」課程

(一)關於數學素養與素養導向評量

主題	內容	摘錄文章來源
	數學素養是指個人能在多樣不同的情境之下，將情境問題轉化成數學問題、使用數學及詮釋數學的能力。這素養包括了數學推理及使用、應用數學概念、程序、事實、工具來解釋、描述及預測現象。	數學素養評量試題/國立臺灣師範大學許志農教授
素養導向評量	(一) 紙筆測驗應包含素養導向試題，也應保留評量重要知識與技能的試題。 (二) 素養導向的紙筆測驗強調運用跨領域核心素養或是領域核心素養以理解或解決真實情境中的問題。 (三) 素養導向試題的設計應盡量符合真實而合理的問題情境，避免不合理或不必要的情境安排。	素養導向「紙筆測驗」要素與範例試題(定稿版)/國家教育研究院
	素養評量的題目不一定非情境不可，而情境題目也不一定就能夠評量素養。其實紮實的數學知識，也是素養。	素養評量芻議 /國立中央大學單維彰副教授

(二)第一冊數學章節名稱

一、數與式	二、絕對值	三、指數	四、常用對數
五、直線方程式	六、圓方程式	七、圓與直線	八、多項式的除法原理
九、一次與二次函數	十、三次函數的圖形特徵	十一、多項式不等式	

課程及教學規劃表

課程名稱	數學素養探究
授課年段	高一上
課程學分	2 學分
教學設計 (一學期以 18 週計算)	(6 分)
學習評量 (請以%表示，總和需 呈現 100%)	(4 分)

