准考證號碼：

國立嘉義女子高級中學112學年度第1次教師甄選初試答案卷

科目：**數學科**

時間：**112/6/20(二)19：00~20：30　計90分鐘。**

說明：1.本試題卷共有2張2頁計有兩大題試題。答案請書寫於答案紙(2張2面)。
　　　2.請核對本試題卷右上角准考證號碼是否正確。
　　　3.可利用試題卷空白處書寫或計算。
　　　4.試題卷須連同答案卷一併繳回，請勿書寫姓名。

一、填充題（計16題，每題5分，共80分，全對才計分）：

1	2	3	4
12	$\frac{10}{3}$	36	$\frac{1}{9}$
5	6	7	8
150	$\frac{80}{153}$	11	$2\sqrt{5}$
9	10	11	12
60	$12x^2-48x+56$	20	$\frac{5}{3}$
13	14	15	16
$4\sqrt{6}$ 或 6（全對才給分）	$30\sqrt{3}$	26	$\frac{8\sqrt{3}}{5}$

_____________彌封線_________彌封線_____________彌封線_____________彌封線_____________彌封線______________

二、計算證明題（計2題，每題10分，共20分）：

<table>
<tr><th>題號</th><th>作答區</th></tr>
<tr><td>1</td><td>

答案 (1)是　(2)遞減數列　(3)$\frac{\pi}{6}$
說明 (1)$a_1=1$，$3a_{n+1}=\pi\cdot sin(a_n)\Rightarrow 3a_n=\pi\cdot sin(a_{n-1})\Rightarrow a_n=\frac{\pi}{3}\cdot sin(a_{n-1})\Rightarrow\lvert a_n\rvert=\frac{\pi}{3}\cdot\lvert sin(a_{n-1})\rvert<\frac{\pi}{3}$
故$\langle a_n\rangle$為有界數列
(2)今以數學歸納法證明$a_{n+1}<a_n$
① $n=1$時
$a_2=\frac{\pi}{3}\cdot sin(a_1)=\frac{\pi}{3}\cdot sin1<\frac{\pi}{3}\cdot sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi<1=a_1$，$\therefore a_2<a_1$
② 設$n=k$時，原式成立，即$a_{k+1}<a_k<\frac{\pi}{3}$
則$n=k+1$時，$a_{k+2}-a_{k+1}=\frac{\pi}{3}\cdot sin(a_{k+1})-\frac{\pi}{3}\cdot sin(a_k)=\frac{\pi}{3}\cdot(sin(a_{k+1})-sin(a_k))<\frac{\pi}{3}\cdot 0$
$\therefore a_{k+2}<a_{k+1}$，即$n=k+1$時成立
③根據數學歸納法，可以證得$\langle a_n\rangle$為遞減數列
(3)由(1)(2)得知$\langle a_n\rangle$為遞減且有下界的數列，則$\langle a_n\rangle$為收斂數列，故令$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=k$
$3a_{n+1}=\pi\cdot sin(a_n)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}3a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\pi\cdot sin(a_n)\Rightarrow 3k=\pi\,sin k\Rightarrow k=\frac{\pi}{6}$

</td></tr>
<tr><td>2</td><td>

Ans: $\frac{1}{2}ab$
Sol:
設 $P(x_1,y_1)$, $Q(x_2,y_2)$
則 $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1$, $\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1$
ΔOPQ面積$=\frac{1}{2}\left\lvert\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right\rvert=\frac{1}{2}\lvert x_1y_2-x_2y_1\rvert$
由柯西不等式
$\left(\left(\frac{x_1}{a}\right)^2+\left(\frac{y_1}{b}\right)^2\right)\left(\left(\frac{y_2}{b}\right)^2+\left(-\frac{x_2^2}{a}\right)\right)\geq\left(\frac{x_1}{a}\cdot\frac{y_2}{b}+\left(\frac{y_1}{b}\right)\left(-\frac{x_2}{a}\right)\right)^2$
$\lvert\cdot\rvert\geq\left(\frac{x_1y_2-x_2y_1}{ab}\right)^2$
$ab\geq x_1y_2-x_2y_1\geq -ab$
$\frac{1}{2}ab\geq\frac{1}{2}\lvert x_1y_2-x_2y_1\rvert$
"="成立的條件為 $\frac{\frac{x_1}{a}}{\frac{y_2}{b}}=\frac{\frac{y_1}{b}}{-\frac{x_2}{a}}\Rightarrow b^2x_1x_2+a^2y_1y_2=0$ —— (*)
$(x_1,y_1)=(a,0)$, $(x_2,y_2)=(0,b)$ 與 $(x_1,y_1)=(\frac{1}{2}a,\frac{\sqrt{3}}{2}b)$, $(x_2,y_2)=(\frac{\sqrt{3}}{2}a,-\frac{1}{2}b)$
皆為 (*) 之解.
故 ΔOPQ面積 $\frac{1}{2}\lvert x_1y_2-x_2y_1\rvert$ 之最大值為 $\frac{1}{2}ab$

</td></tr>
</table>