112 學年度數學代理教師筆試試卷

報名序號：__________________ 姓名：______________________

測驗說明：

1. 測驗時間：100 分鐘
2. 1~10 題為填充題，請於答案卷上標示題號及答案即可。如需計算，可利用試卷空白處計算。請勿於答案卷上計算，以免答案卷不敷使用。
3. 11~14 題為計算證明題，作答時請標示題號並詳列計算及證明過程，只寫答案者不予計分。
4. 測驗開始時，請於試卷上寫上報名序號及姓名，測驗結束後連同答案卷一併繳回。
5. 請勿在答案卷上書寫姓名及任何可供識別身份之標記，違者不予計分。

一、填充題(共 60 分,每題 6 分)

1. 已知一組 16 位元的二進位碼位元組，每個位元皆為 0 和 1，規定第一個位元和最後一個位元都不可以是 0，和此組位元組裏不可有兩個連續的位元為 0 且不可有三個連續的位元為 1，則滿足條件的位元組有____________種。

2. 甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛八人坐飛機時，恰好被安排在整個橫排的八個位置，如圖

，A 和 K 為靠窗的坐位，C 和 D 及 G 和 H 有走道相隔不算相鄰。已知甲乙要相鄰而坐且甲不靠窗，丙丁不相鄰且皆不靠窗，位置的排法有____________種。

3. 已知某地區有 0.1% 的人口罹患心臟病，且罹患心臟病者經過某項檢查，有 99% 的機率可以正確檢測出來，而沒有罹患心臟病者經過該項檢查，有 2% 的機率可能會被誤判成罹患心臟病。今甲經過該檢查後判定為罹患心臟病，醫生建議其進行第二次檢查，並且假設兩次檢查互相獨立，若第二次檢查的結果仍判定甲罹患心臟病，則甲真的罹患心臟病的機率為____________.

4. 半圓Γ的直徑$\overline{AB}$之長為14，圓Ω切$\overline{AB}$於點P且交Γ於點Q與點R。若$\overline{QR}=3\sqrt{3}$且$\angle QPR=60^{\circ}$，則ΔPQR的面積為______________.

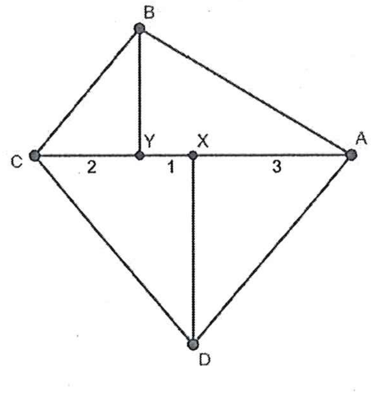
5. 若多項式方程式$x^3+ax^2+bx+c=0$的三個根為$\cos\frac{2\pi}{7}$、$\cos\frac{4\pi}{7}$、$\cos\frac{6\pi}{7}$，其中角度是弳度，則乘積abc之值為多少？____________.

6. 對每一個複數$\omega=a+bi$，其中a、b為實數、$i=\sqrt{-1}$，其共軛複數為$\overline{\omega}=a-bi$。設$f(z)=4i\overline{z}$，方程式$P(z)=z^4+4z^3+3z^2+2z+1=0$有四個複數根$z_1$、$z_2$、$z_3$、$z_4$。若多項式$Q(z)=z^4+Az^3+Bz^2+Cz+D=0$，其中係數$A$、$B$、$C$、$D$為複數，且$Q(z)=0$的四個複數根為$f(z_1)$、$f(z_2)$、$f(z_3)$、$f(z_4)$，則$B+D=$？______________

7. 如圖所示，設$ABCD$為等腰梯形，其中$\overline{BC}//\overline{AD}$且$\overline{AB}=\overline{CD}$，點$X$與點$Y$在對角線$\overline{AC}$上，其中點$X$位於點$A$與點$Y$之間。若$\angle AXD=\angle BYC=90^{\circ}$，

$\overline{AX}=3$，$\overline{XY}=1$，$\overline{YC}=2$

則$ABCD$的面積為多少？______________



8. 已知L為過原點與x軸正向夾角為θ的直線， P對直線L作垂直線的垂足P'稱為P對L的投影。已知「對L作投影」的作用可以表示成一個線性變換，其代表的二階方陣為A，則$A^{112}=$____________________。

9. 在ΔABC中，$\overline{AB}=2\sqrt{7}$ 、$\overline{AC}=6$ 、$\overline{BC}=4$ ，已知角C的內角平分線與$\overline{AC}$邊上的高交於P

若$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則數對$(\alpha,\beta)=$__________。

10. 設a , b為實數。根據迴歸直線的理論可知，平方和

$$[5-(a\cdot 4+b)]^2+[5-(a\cdot 6+b)]^2+[7-(a\cdot 8+b)]^2+[9-(a\cdot 10+b)]^2+[9-(a\cdot 12+b)]^2$$

在數對$(a,b)=$______時得到最小值。

二、計算證明題(共 40 分,依題分)

11. 請敘述『牛頓一次因數檢查法』，並證明。(10 分)

12. 設數列$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式為$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + n \quad (n \geq 2) \end{cases}$，試求一般項$a_n$。(10 分)

13. 設甲、乙兩箱中，甲箱內有 1 白球 1 紅球，乙箱內有 1 白球 2 紅球。現在每次先從甲箱中隨機取一球，放入乙箱內，再從乙箱隨機取一球放入甲箱，這樣稱為一局。試求

(1)在第二局結束後，有 2 紅球在甲箱內的機率。(6 分)

(2)在經過長時期的交換後，有 2 紅球在甲箱內的機率。(4 分)

14. 空間中，直線 L 與直線 M 為歪斜線，直線 L 垂直平面 N 於 A。在直線 L 上另有 B，C 兩點使得$\overline{AB}=\overline{BC}$。直線 M 交平面 N 於 D，在直線 M 上另有 E，F 兩點使得$\overline{BE} \perp \overline{AC}$ 、$\overline{CF} \perp \overline{AC}$ 且 E，F 兩點在平面 N 的投影點分別為 I、J(示意圖如下)，已知$\overline{AD}=8$、$\overline{BE}=5$、$\overline{CF}=6$ ，試求

(1)線段$\overline{IJ}$的長度。(5 分)

(2)直線 L 與直線 M 的距離。 (5 分)