臺中市立文華高級中等學校 112 學年度第 2 次教師甄選
數學科專業知能試題本

一、填充題：(共 80 分)

I.填充一(每格 4 分，共 32 分，全對才給分。)

1. 坐標平面上有一點 $A(2,6)$，點 A 到 $L_1:2x-y=3$ 與 $L_2:3x-2y=0$ 的投影點分別為 B,C，求 ΔABC 的外接圓半徑為______________。

2. 空間中點 P、Q 分別在 $L_1:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y-2}{-2}=-z$ 和 $L_2:x-3=\dfrac{y-1}{-4}=z-1$ 上，且 $\overline{PQ}$ 為 L_1,L_2 之公垂線段，若 A,B 分別為 L_1,L_2 上的任意點，求向量內積 $\overline{PQ}\cdot\overline{AB}=$_________。

3. 已知 $f(5^x)=7x\cdot\log_3 5+5$，求 $f(3)+f(9)+f(27)+.....+f(3^{10})$ 之值________。

4. $A(2,0)$、$B(-2,0)$、$P(x,y)$，若 ΔPAB 之周長為 10，且 ΔPAB 面積為 4，求 $x^2+y^2=$_________。

5. 以線段 $\overline{AB}$ 為直徑作一圓，O 為圓心，P 為圓周上任意一點，$\angle OBP=\theta$，令 S_1 為扇形 POB 的面積，S_2 為 ΔABP 的面積，求 $\lim\limits_{\theta\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{S_1}{S_2}=$_________。

6. 已知 m 階方陣 $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times m}$，其中每一元素 $a_{ij}=\begin{cases}1 & j<j\\ 0 & i=j\\ -1 & i>j\end{cases}$，若方陣 A 中所有元素的標準差為 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，求 $m=$_______。

7. 箱子內有編號 1.2.3.4.5.6 的球各一顆，每一顆球被抽中的機率皆相同。今從中抽取一球後，將編號與該抽中球編號的因數、倍數相同的球移出(例：抽中 3 號，則移出 1.3.6 號

球)，然後再抽取箱中的球，並重複上述動作，直到球被抽完為止，則最後一次抽取還有兩顆球的機率為______________(化為最簡分數)。

8. 設 $x \in R$，則 $\dfrac{\sin x+2}{2\cos x+3}$ 的範圍為_________________(請用區間表示)。

II.填充二(每格 6 分，共 48 分，全對才給分)

9. 空間坐標中，單位球 S，球心 $O(0,0,0)$，已知球面上三點 $A(1,0,0)$、$B(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4},\frac{\sqrt{3}}{2})$、$C$，若 C 為 A、B 兩點最短路徑的中點，則 C 點坐標為________________(化為最簡根數)。

10.若實係數多項式 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$，已知 $f(1)=98$，$f(2)=197$，$f(3)=296$，求 $f(8)+f(-4)=$___________。

11.ΔABC 中，$\overline{AB}=13$，$\overline{BC}=14$，$\overline{AC}=15$，P 是 ΔABC 內一點，且 $\angle PAB=\angle PBC=\angle PCA=\theta$，求 $\tan\theta=$_________。

12. 已知實數 $a,b,c,$ 且 a,b,c 成等差，若三次函數 $f(x)$ 滿足 $f(a)=a, f(b)=b, f(c)=c$，且 $f(x)$ 在 $x=b$ 的一次近似為 $2x-5$，則 $a+b+c=$___________。

13. 設 $x,y\in R$，則 $\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2+(x+y-2)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2+(x+y)^2}$ 的最小值為____________。

14. 若 $z_2^{\ 2}-2z_1z_2+2z_1^{\ 2}=0$，$z_3^{\ 2}-6z_2z_3+12z_3^{\ 2}=0$，且 $|z_1-z_2|=2$，已知 z_1, z_2, z_3 在複數平面上所表示的三點分別為 A、B、C，則 ΔABC 面積為___________(化為最簡根數)。

15. 三角錐 A-BCD，其中 $\overline{BC}=6, \overline{CD}=4, \overline{BD}=4, \overline{AB}=4\sqrt{2}, \overline{AC}=2\sqrt{5}$，若 ΔABC 和 ΔBCD 所夾的兩面角為 θ，且 $\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{6}$，則 $\overline{AD}$=________(化為最簡根數)。

16. 一拋物線 Γ：$y^2=ax$ 上一點 P，已知 P 到原點 O 的距離為 2，P 到 x 軸作垂足 H，若 Γ、x軸、直線 PH所圍成的封閉區域為 Ω，則 Ω 繞著 x 軸旋轉的旋轉體體積最大值為______________。