

花蓮縣 112 學年度國民中小學教師聯合甄選

【科目名稱：國中數學】

選擇題【共 25 題，每題 4 分，共 100 分】請以 2B 鉛筆於答案卡上作答，單選題；答錯不倒扣。

- 某校圖書館有 5000 元購書經費，今有三種圖書每本單價分別為 100, 150, 200 元。該校欲一共購買三十本，每種書都至少一本，且恰好把 5000 元用完。試問有幾個不同的購書方案？
(A) 9 (B) 10 (C) 11 (D) 12
- 方程式 $2x^2 + xy + y^2 = 2$ 的圖形通過點 $(1, -1)$ 的切線方程式為何？
(A) $y = -\frac{4}{3}x$ (B) $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$ (C) $y = 2x - 3$ (D) $y = 3x - 4$
- 設函數 $f(x) = x^x$ ，則導數 $f'(2)$ 之值為何？
(A) 4 (B) 6 (C) $1 + \ln 2$ (D) $4(1 + \ln 2)$
- 下列關於積分的算式，何者正確？
(A) $\int_e^\infty \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = 1$ (B) $\int_{-\infty}^\infty x^3 dx = 0$ (C) $\int_{-\infty}^\infty e^{-x} dx = 0$ (D) $\int_{-3}^3 \frac{\tan x}{1+x^2+x^4} dx = 0$
- 正實數數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴關係式 $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n} + \frac{1}{4}$ ，求 a_{99} 的值為何？
(A) 2400 (B) 2401 (C) 2500 (D) 2501
- 冪級數 (power series) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} x^n$ 的收斂半徑為何？
(A) $(-3, 3)$ (B) $(-3, 3]$ (C) $[-3, 3)$ (D) $[-3, 3]$
- 設 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ ， $\iint_D (x+y) dA$ 之值為何？
(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) $\frac{1}{2}(1-x^3)$ (D) $-\frac{1}{2}(y^3 - y^2 - y)$
- 已知 $f(x): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 為黎曼可積函數 (Riemann integrable, **R.I.**)。
若 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ ，則下列敘述何者正確？
(A) $F(x)$ 為連續但不一定可微 (B) $F(x)$ 為可微函數 (C) $F(x)$ 不一定連續，但有極大值 (D) 以上皆非
- 在使用變異數分析探討是什麼因素造成資料變異時，下列關於變異數分析的敘述，何者正確？
(A) 解釋變數與反應變數均為連續型變數
(B) 每個母體均服從常態分布但可以有各自不同的平均數與不同的變異數
(C) 以母體間的均方和與母體內的均方和之比值當作檢定統計值
(D) 檢定統計量服從卡方分布
- 有關簡單線性迴歸係數 (β) 與相關係數 (ρ) ，下列敘述何者為真？
(A) 相關係數 ρ 愈大，表示所探討的 X、Y 二個變項因果關係愈大。
(B) 迴歸係數 β 用來表示 X、Y 二個變項之間的變化關係，沒有自變項 (independent variable) 與應變項 (dependent variable) 之分。
(C) β 大於 0 時， ρ 可能大於 0 或小於 0。
(D) β 與 ρ 兩者之間無絕對大小關係，例如 β 一定要大於 ρ 。
- 兩個級數 A: $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n}$ 和 B: $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1}{n}$ 。下列選項何者正確？
(A) A 和 B 皆收斂 (B) A 收斂，B 不收斂 (C) A 不收斂，B 收斂 (D) A 和 B 皆不收斂
- 若 $A \subset \mathbb{R}$ (實數)，且 $f(x): A \rightarrow \mathbb{R}$ 。
甲：若 $f(x)$ 為一連續函數且有反函數 $f^{-1}(x)$ ，則 $f^{-1}(x)$ 也必為連續。
乙：若 $f(x)$ 為一可微函數且有反函數 $f^{-1}(x)$ ，則 $f^{-1}(x)$ 也必可微。
有關甲、乙兩推論，下列選項何者正確？
(A) 甲和乙皆正確 (B) 甲正確，乙不正確 (C) 甲不正確，乙正確 (D) 甲和乙皆不正確

13. 求 $y = \cos(e^{-\theta^2})$ 的微分。

- (A) $2\theta e^\theta \sin(e^{-\theta^2})$ (B) $-2\theta e^\theta \sin(e^{-\theta^2})$ (C) $-e^{-\theta} \sin(e^{-\theta^2})$ (D) $2\theta e^{-\theta^2} \sin(e^{-\theta^2})$

14. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x =$

- (A) 1 (B) 0 (C) e (D) $\frac{\pi}{4}$ 。

15. 函數 $f(x,y) = x \cdot y$ ，在 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$ 的極大值為何？

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

16. 下列哪一個二階矩陣所代表的線性變換其幾何意義為“先繞原點逆時針轉 45° ，再以 x 軸為對稱軸做鏡射”？

- (A) $\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$

17. 下列哪一個二階方陣，其所有的 eigenvalues 都是正整數？

- (A) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

18. 座標平面上，拋物線 $y = ax^2 + bx + c$ 與 x 軸相交於 A, B 兩點，且與 y 軸相交於點 C 。若 $\triangle ABC$ 是直角三角形，則 ac 的值為何？

- (A) 必定為 -1 (B) 必定為 0 (C) 必定為 1 (D) 不能確定

19. 若一次函數 $y = rx - r$ 的函數值 y 隨著 x 的減少而跟著嚴格遞減，問此函數圖形不通過哪個象限？

- (A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限

20. 三個集合 A, B, C (不必相異，也不必非空) 滿足 $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3\}$ 。請問集合序列 (A, B, C) 的組數有幾組？

- (A) 128 (B) 216 (C) 256 (D) 343

21. 坐標平面上與 x 軸相切，且通過 $(0, 2)$, $(3, 1)$ 兩點的圓共有兩個。試問兩圓半徑的和為何？

- (A) 25 (B) 30 (C) 35 (D) 40

22. 設 $R_n(x)$ 表示函數 f 的泰勒級數之 n 次餘項，下列關於泰勒級數 (Taylor series) 的敘述，何者正確？

- (A) 每一個函數的泰勒級數都存在
(B) 函數 f 的泰勒級數一定會收斂
(C) 當 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ 時函數 f 的泰勒級數收斂到函數 f
(D) 當 $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x)$ 存在時函數 f 的泰勒級數收斂到函數 f

23. 正七邊形 $ABCDEFGH$ 的邊長為 2，則向量 \overrightarrow{AB} 與向量 \overrightarrow{BE} 的內積的值為何？

- (A) $-\frac{7}{2}$ (B) -3 (C) $-\frac{5}{2}$ (D) -2

24. 設 α 為不超過 45° 的銳角。若已知 $\cot 2\alpha - \sqrt{3} = \sec \alpha$ ，則 α 的大小為何？

- (A) 10° (B) 20° (C) 30° (D) 40°

25. 設複數 z 滿足 $|z^2 + 1| = |z|$ ，則 $|z|$ 的最大值為何？

- (A) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ (B) $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$ (C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$