國立羅東高級中學 112 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

一、填充題（請在答案卷第一頁依題號順序作答並標明題號，每題 5 分，共 60 分）:

1. 實數 x 滿足方程式 $x^3+\frac{1}{x^3}=4\sqrt{7}$，求 $x^2+\frac{1}{x^2}$ 之值。 Ans: 5

2. 將與 110 互質的所有正整數，從小到大排成數列，求此數列的第 2023 項。 Ans: 5561

3. $\theta\in\mathbb{R}$，求 $f(\theta)=\frac{3\cos\theta+2}{2\sin\theta+3}$ 的最大值 M，最小值 m，求數對(M, m)。 Ans: $(\frac{6+\sqrt{61}}{5},\frac{6-\sqrt{61}}{5})$

4. 若 a 為 $x^7-1=0$ 之一虛根，求 $a+a^2+a^4$ 之值。 Ans: $\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$

5. 曲線 $C: y=x^5-x^4+k^2x^3-(k^2-k)x^2-(k+2)x+1$，不論 k 為任何實數，曲線 C 恆過兩定點，求此兩定點的坐標。 Ans: $(0,1)$, $(1,-1)$

6. 求函數 $f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}+\sqrt{x^4-3x^2-8x+20}$ 的最小值。 Ans: 4

7. 空間中兩條歪斜線 $L_1:\frac{x}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{2-z}{1}$, $L_2:\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{1-z}{3}$，已知 $P_1\in L_1$, $P_2\in L_2$，

   P 在 $\overline{P_1P_2}$ 上，且 $\overline{P_1P}:\overline{PP_2}=1:2$，求 P 點的軌跡方程式。Ans: $3x-15y-9z+16=0$

8. 設 $a>0, b>, c>0$，試求 $\frac{a}{b+c}+\frac{4b}{c+a}+\frac{9c}{a+b}$ 的最小值。Ans: 4，此題送分

9. 求 $12x^6-28x^4-14x^3+17x^2-16x-67\cdot 6^5$ 除以 $x-6$ 的餘式。Ans: 84

10. 已知四面體$SABC$，若底面$\triangle ABC$是以$\overline{AB}$為斜邊的等腰直角三角形，且$\overline{SA}=\overline{SB}=\overline{SC}=1$，$\overline{AB}=1$。假設 S,A,B,C 四點均在以點 O 為球心的某個球面上，求點O到平面ABC 的距離。

    Ans: $\frac{\sqrt{3}}{6}$

11. 已知方程式 $x-\frac{16}{2^x}=0$ 恰有一實根 α，方程式 $2^x+x-4=0$ 恰有一實根 β，求 $\alpha+\beta$之值。

    Ans: 4

12. 如圖，四面體 $DABC$ 的體積 $\frac{1}{6}$，且 $\angle ACB=60^\circ$，$\overline{AD}+\sqrt{3}\cdot\overline{BC}+\frac{\overline{AC}}{2}=3$，求 $\overline{CD}$長。

    Ans: $\sqrt{5}$