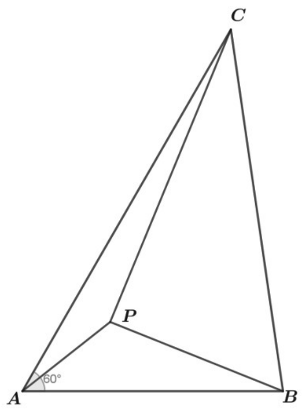
三、計算證明題(每題 7 分，請詳細寫出計算過程，否則不予給分)

1.如下圖，$\triangle ABC$中，已知 P為$\triangle ABC$內一點，$\overline{AB}=35, \overline{AC}=56, \angle BAC=60°, \overline{AP}=15, \overline{BP}=25$，試求$\overline{CP}$的值。



[解]

由餘弦定理得知， $\cos\angle APB=\dfrac{\overline{AP}^2+\overline{BP}^2-\overline{AB}^2}{2\overline{AP}\times\overline{BP}}=\dfrac{15^2+25^2-35^2}{2\times15\times25}=-\dfrac{1}{2}$

所以$\angle APB=120°$ 。

作$\Delta AP'C$ ，使得$\Delta AP'C\sim\Delta APB$ ，所以$\overline{AP'}=24$ ，$\overline{CP'}=40$ ，

$\angle BAP=\angle CAP'$ ，$\angle APB=120°=\angle AP'C$ ，因此$\angle PAP'=60°$ 。

由餘弦定理得知，

$$\overline{PP'}^2=\overline{AP}^2+\overline{AP'}^2-2\overline{AP}\times\overline{AP'}\cos\angle PAP'=15^2+24^2-2\times15\times24\times\frac{1}{2}=21^2$$

所以$\overline{PP'}=21$ 。

再由餘弦定理得知，

$$\cos\angle AP'P=\frac{\overline{AP'}^2+\overline{PP'}^2-\overline{AP}^2}{2\overline{AP'}\times\overline{PP'}}=\frac{24^2+21^2-15^2}{2\times24\times21}=\frac{11}{14}\Rightarrow\sin\angle AP'P=\frac{5\sqrt{3}}{14}$$

所以$\cos\angle CP'P=\cos(120°-\angle AP'P)=\cos120°\cos\angle AP'P+\sin120°\sin\angle AP'P=\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{11}{14}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{5\sqrt{3}}{14}=\dfrac{1}{7}$

再由餘弦定理得知，

$$\overline{CP}^2=\overline{CP'}^2+\overline{PP'}^2-2\overline{CP'}\times\overline{PP'}\cos\angle CP'P=40^2+21^2-2\times40\times21\times\frac{1}{7}=1801$$

所以$\overline{CP}=\sqrt{1801}$

2. 坐標空間中兩直線$L_1:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z}{2}$、$L_2:\dfrac{x-6}{-1}=\dfrac{y+1}{-2}=\dfrac{z-6}{a}$交於一點$Q(x_0,y_0,z_0)$，已知直線$L$過$Q$點與直線$L_1$之銳夾角為$\theta$，且$L$與$L_1,L_2$所在的平面亦夾$\theta$角，其中$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，試求直線$L$之方程式。

[解]

$$\begin{cases}x=3+t=6-s\\ y=-1-2t=-1-2s\Rightarrow t=s=\dfrac{3}{2}\Rightarrow a=-2\\ z=2t=6+as\end{cases}$$，得$Q\left(\dfrac{9}{2},-4,3\right)$。

我們將L的方向向量$\overrightarrow{v}$分解成$\overrightarrow{v}$投影在L_1,L_2平面上之向量與垂直L_1,L_2平面的向量之和，由題意可知，將$\overrightarrow{v}$投影在L_1,L_2平面上，可與L_1完全重合，故與$\overrightarrow{v_1}$平行，令$|\overrightarrow{v}|=3$，又$\cos\theta=\dfrac{2}{3}$，故$\overrightarrow{v}$投影在L_1,L_2平面上之向量長度為 2，且

此向量$=\pm2\dfrac{\overrightarrow{v_1}}{|\overrightarrow{v_1}|}=\pm\left(\dfrac{2}{3},-\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3}\right)$

垂直L_1,L_2平面的向量其長度為$\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$，又此向量平行$\overrightarrow{v_1}\times\overrightarrow{v_2}=(1,-2,2)\times(-1,-2,-2)=(8,0,-4)$，

故垂直L_1,L_2平面的向量$=\pm(2,0,-1)$

所以可得：$\overrightarrow{v}=\pm\left(\dfrac{8}{3},-\dfrac{4}{3},\dfrac{1}{3}\right)\vee\pm\left(-\dfrac{4}{3},-\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3}\right)$，因此$L$的方程式為：$\dfrac{x-\frac{9}{2}}{8}=\dfrac{y+4}{-4}=\dfrac{z-3}{1}\vee\dfrac{x-\frac{9}{2}}{-4}=\dfrac{y+4}{-4}=\dfrac{z-3}{7}$ 。

3. 已知在停車場中有編號 1 號到 5 號的五個未停車的停車格，現在有五輛車依序入場停車，每輛車的駕駛入場前各自在心中先選定 1~5 號的一個號碼(可重複)，入場後就停入一開始所選號碼的車位，若規定停車時發現預定要停的車位已經停了其他車，則就停下一個號碼的車位，若無車位可停就無法停車。例如：選 3 號的車入場時發現 3 號已經停車了，就停入 4 號車位；若 3 號、4 號都停車了，就停入 5 號車位；但若發現 3 號、4 號、5 號都停車了，就無法順利停入。所以例如一開始五位駕駛依序選定的號碼為 1、4、2、2、5，則四輛車可順利停車；但如果選的四個號碼為 2、2、4、3、3，則無法順利停車。試問五位駕駛共有幾種依序選定號碼的方法，可以讓五輛車順利停車。

[解]

法一：

先多增加一格 6 號停車格，並將 6 個停車格排成環狀，讓五位駕駛依序由 1~6 號任意選定一個號碼，那麼無論選到什麼號碼一定都可以停到車位，並且有一個空車格，顯然"選定的號碼會讓空車格在 6 號"為"選定的號碼可以在原本狀況順利停車"的充要條件。

假設選定號碼為(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)時會讓第i輛車停到p_i號車格(例如選定號碼為$(2,2,4,3,3)$時，五輛車分別停在$2,3,4,5,6$號車格)，那麼號碼為$(x_1+j,x_2+j,x_3+j,x_4+j,x_5+j)\pmod 6$時會讓第$i$輛車停到$p_i+j\pmod 6$號車格(※註若號碼 mod 6 後為 0 即視為 6 號)

號碼$(x_1+j,x_2+j,x_3+j,x_4+j,x_5+j)\pmod 6$，其中$j=0,1,2,3,4,5$時，這 6 組號碼恰只有一組會讓空位在 6 號

故所求$=\dfrac{(5+1)^5}{6}=1296$。

法二：

討論五個號碼的同異：

(1)五同：$(1,1,1,1,1)$，1 種。

(2)四同一異：$(1,1,1,1,2),(1,1,1,1,3),(1,1,1,1,4),(1,1,1,1,5)$或$(1,2,2,2,2)$，共$5\times\dfrac{5!}{4!}=25$種。

(3)三同二同：$(1,1,1,2,2),(1,1,1,3,3),(1,1,1,4,4),(1,1,2,2,2),(1,1,3,3,3)$，共$5\times\dfrac{5!}{3!2!}=50$種。

(4)三同二異：$(1,1,1,2,3\sim5),(1,1,1,3,4\sim5),(1,1,1,4,5),(1,2,2,2,3\sim5),(1,2,3,3,3)$，共$10\times\dfrac{5!}{3!}=200$種。

(5)二同二同一異：$(1,1,2,2,3\sim5),(1,1,3,3,4\sim5),(1,1,2,3,3),(1,1,2,4,4),(1,1,3,4,4),(1,2,2,3,3),(1,2,2,4,4)$，

共$10\times\dfrac{5!}{2!2!}=300$種。

(6)二同三異：$(1,1,2,3,4\sim5),(1,1,2,4,5),(1,1,3,4,5),(1,2,2,3,4\sim5),(1,2,2,4,5),(1,2,3,3,4\sim5),(1,2,3,4,4)$，

共$10\times\dfrac{5!}{2!}=600$種。

(7)五異：$(1,2,3,4,5)$，共$5!=120$種。故全部共有1296種。

（試題結束）