

國立關西高級中學 112 學年度第 1 次教師甄選題目試卷(含答案)

科別	數學科筆試	說明	■單面、共 5 頁	准考證 末三碼	□□□
----	-------	----	-----------	------------	-----

一、多重選擇題(全對得 6 分，答錯一個選項得 4 分，答錯二個選項得 2 分，答錯三個選項以上不給分)

1. (ACE) 坐標平面上有一圖形 Γ ，其方程式為 $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 101$ 。試選出正確的選項。
 - (A) Γ 與 x 軸正向、 y 軸正向分別交於 $(11,0)$ 、 $(0,11)$
 - (B) Γ 上 x 坐標最小的點是點 $(-9,0)$
 - (C) Γ 上的點與原點距離的最小值為 $\sqrt{101} - \sqrt{2}$
 - (D) Γ 在第三象限的點之極坐標可用 $[9, \theta]$ 表示，其中 $\pi < \theta < \frac{3}{2}\pi$
 - (E) Γ 經旋轉線性變換後，其圖形仍可用一個不含 xy 項的二元二次方程式表示

2. (ABE) 設 $P(X)$ 表示事件 X 發生的機率，而 $P(X|Y)$ 表示在事件 Y 發生的條件下，事件 X 發生的機率。今有 2 顆黑球、2 顆白球、3 顆紅球共 7 顆大小相同的球排成一列。

設事件 A 為 2 顆黑球相鄰的事件，事件 B 為 2 顆黑球不相鄰的事件，而事件 C 為任 2 顆紅球都不相鄰的事件。試選出正確的選項。

 - (A) $P(A) < P(B)$
 - (B) $P(C) = \frac{2}{7}$
 - (C) $2P(C|A) + 5P(C|B) > 2$
 - (D) $P(C|A) > 0.2$
 - (E) $P(C|B) > 0.3$

3. (AD) 已知橢圓 $5x^2 + 4xy + 8y^2 = 36$ ，以原點為中心，逆時針旋轉 θ ($0 \leq \theta < \pi$)，使得長軸在 x 軸上，則下列選項何者正確？

(A) $\tan 2\theta = \frac{4}{3}$ (B) $\cos 2\theta = -\frac{3}{5}$ (C) 短軸長為 6 (D) 橢圓面積為 6π (E) 正焦距長 $\frac{4}{3}$ 。

4. (AB) 設 $F(x)$ 、 $f(x)$ 皆為實係數多項式函數。已知 $F'(x) = f(x)$ ，試選出正確的選項。
 - (A) 若 $a \geq 0$ ，則 $F(a) - F(0) = \int_0^a f(t) dt$
 - (B) 若 $F(x)$ 除以 x 的商式為 $Q(x)$ ，則 $Q(0) = f(0)$
 - (C) 若 $f(x)$ 可被 $x+2$ 整除，則 $F(x) - F(0)$ 可被 $(x+2)^2$ 整除
 - (D) 若對所有實數 x ， $F(x) \geq \frac{x^2}{2}$ 都成立，則對所有實數 x ， $f(x) \geq x$ 也都成立
 - (E) 若對所有 $x > 0$ ， $f(x) \geq x$ 都成立，則對所有 $x > 0$ ， $F(x) \geq \frac{x^2}{2}$ 也都成立

二、填充題(每題 5 分)

1. 去掉含有比 7 大的質因數之正整數，剩下的正整數由小到大排成一數列 $\langle b_k \rangle = \langle 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 24, 25, \dots \rangle$ ，則 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{b_k} = \frac{35}{8}$ 。

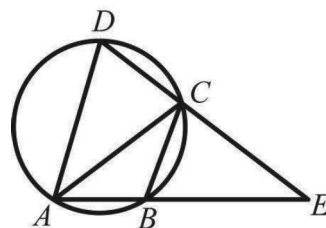
2. 設 z 為複數，若 $|z|=1$ ，則 $|z^2 - z + 2|$ 之最小值為 $\frac{\sqrt{14}}{4}$ 。

3. $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=8$ ， $\overline{BC}=7$ ， $\overline{CA}=9$ ，且 \overline{AB} 的中垂線與 \overline{AC} 邊上的高交於 Q 點，若 $\overrightarrow{AQ} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，求數對 $(x, y) = \left(\frac{1}{10}, \frac{8}{15}\right)$ 。

4. 設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $xf'(x) = 3x^4 - 2x^3 + 4x^2 + \int_1^x f(t)dt$ 對 $x \geq 1$ 恆成立。則 $f(x) = \underline{4x^3 - 3x^2 + 8x - 4}$ 。

5. $\triangle ABC$ 中， $A(4, -1)$ ， $\angle B, \angle C$ 內角平分線方程式分別為 $2x - y + 1 = 0$ 、 $x - 1 = 0$ ，則直線 BC 的方程式為 $\underline{2x + y + 5 = 0}$ 。

6. 如下圖，在半徑為 1 的單位圓內接四邊形 $ABCD$ ， \overline{AB} 的延長線與 \overline{CD} 的延長線交於 E 點，已知 $\overline{BC} = \overline{CD}$ ， $\overline{AC} = \overline{CE}$ ，且 $\frac{\overline{CE}}{\overline{BE}} = \frac{11}{30}$ ，則 $\overline{BD} = \underline{\frac{48}{25}}$ 。



7. 若 a, b, c 為 $x^3 - 5x^2 - 3x + 7 = 0$ 的三根，則 $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ 的值 = 125。

8. 設 a_1, a_2, \dots, a_{18} 均為大於 1 之實數，則 $\frac{\log_{a_1} 2023 + \log_{a_2} 2023 + \dots + \log_{a_{18}} 2023}{\log_{a_1 a_2 \dots a_{18}} 2023}$ 之最小值為 324。

9. 從單字 INSTITUTIONALIZED 中任取 4 個字母排成一列，共有 9639 種排法。

10. 動物學家以老鼠為實驗對象進行一項記憶實驗，測試其在迷宮中記憶行為。經實驗，已知老鼠從迷宮某處出發，該處僅能往左及往右兩個方向前進。若往左走則經過 10 分鐘後會回到原地，若往右走則有 $\frac{2}{3}$ 的機率於 5 分鐘後回到原地， $\frac{1}{3}$ 的機率於 15 分鐘後走出迷宮；假設老鼠向左走的機率為 0.4，問老鼠能夠走出迷宮所花費時間的期望值為 45 分鐘。

11. 如下圖，已知凸六邊形 $A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6$ 的六個邊塗紅色。若再將每一條對角線任意塗上紅、黃、藍三種顏色的其中一種，則使得任意一個 $\Delta A_i A_j A_k$ 都至少有一邊是紅色的機率為 $\frac{361}{729}$ 。

