

數學科 試題卷

(請考生自填) 准考證號碼：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

一、填充題【每格 3 分】

1. 已知複數  $z, z_1, z_2$  ( $z_1 \neq z_2$ ) 滿足  $z_1^2 = z_2^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$ ，且  $|z - z_1| = |z - z_2| = 4$ ，則  $|z| = ?$
2. 已知數列  $\langle a_n \rangle$  中， $a_1 = 1$ ， $a_n = \frac{n}{n^2 - 1}$  ( $n \geq 2$ )，則  $\sum_{k=1}^n (a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdots a_k) = ?$  (以  $n$  表之)
3. 令  $f(x) = \int_{x^2}^{x^3} (t^2 + t - 3)^3 dt$ ，則  $f'(-1) = ?$
4. 平面上兩向量  $\vec{a}, \vec{b}$  滿足  $|2\vec{a} + \vec{b}| = 2$ ， $|\vec{a} - 4\vec{b}| = 1$ ，若  $|3\vec{a} + 5\vec{b}|$  的最大值為  $M$ ，最小值為  $m$ ，則數對  $(M, m) = ?$
5. 設函數  $f(x) = \frac{x^2 + x + 16}{x}$ ，( $2 \leq x \leq m$ )，其中實數  $m > 2$ ，若  $f(x)$  的值域為  $[9, 11]$ ，則  $m$  值的範圍為何？
6. 設  $a, b$  皆為實數，求當  $(a - 41b - 33)^2 + (a - 42b - 34)^2 + (a - 40b - 35)^2 + (a - 39b - 32)^2 + (a - 38b - 31)^2$  為最小值時的  $(a, b) = ?$
7. 有一球體地球儀，半徑為 20 公分，已知 A, B 兩點的座標分別為  $0^\circ N, 15^\circ E$  與  $45^\circ S, 120^\circ W$ ，則 A, B 兩地的球面最短距離為何？
8. 已知方程式  $x^3 - 3x + 1 = 0$  在  $(1, 2)$  上恰有一根  $\alpha$ ，以初始值  $a_0 = 2$  使用牛頓法一次，可得  $\alpha$  的近似值  $a_1$ 。求  $a_1$  的值。
9. 四面體  $ABCD$  中，底面  $\triangle BCD$  為邊長 6 的正三角形，而  $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 5$ 。求直線  $AB$  與直線  $CD$  的距離。
10. 一袋中有 5 紅球、6 白球，自袋中每次取出一球，取出不放回，取完為止。若袋中每一球被取中的機會均等。計算在取球過程中已取出的紅球個數不大於已取出的白球個數的機率。

二、填充題【每格 5 分】

1. 已知數列  $\langle a_n \rangle$  中， $a_1 = 1$ ， $a_2 = 2$ ， $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$  ( $n \in N$ )，則  $\sum_{k=1}^{2023} (a_{k+1}^2 - a_k \cdot a_{k+2}) = ?$
2. 設函數  $f(x) = |2 - \log_3 x|$ ，已知正實數  $a, b, c$  滿足  $a < b < c$  且  $f(a) = 2f(b) = 2f(c)$ ，則  $\frac{b}{ac} = ?$

3. 六個人排成一列，每個人從紅、黃、藍、白、黑五種顏色的球中任選一個(每種顏色的球都至少有 6 個)，要求任意相鄰兩人所選擇的球均同色或至少有一球為白色，則滿足條件的選球方法有幾種？
4. 在  $\triangle ABC$  中，設  $M, N$  分別在邊  $\overline{AB}, \overline{AC}$  上(包含頂點)，且  $\overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AB}$ ， $\overrightarrow{AN} = y \overrightarrow{AC}$ ， $D$  是  $\overline{BC}$  的中點， $G$  是線段  $\overline{MN}$  與  $\overline{AD}$  的交點，若  $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AD}$ ，則  $\frac{1}{x^2} + \frac{4}{y^2}$  的最小值為何？
5. 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\left(1+\frac{3}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right)}{n} = ?$
6. 已知  $y = x^3 + kx^2 - 1$  恰有三相異切線過  $(0,0)$ ，求  $k$  的範圍。

### 三、計算與證明題【每題 10 分】

1. 雙曲線  $\Gamma: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ， $F_1, F_2$  分別為此雙曲線的左、右焦點， $\overline{AB}$  為通過  $F_2$  的焦弦，點  $A$  在第一象限，已知  $\overline{AF_2} = 3\overline{BF_2}$ ， $\overline{F_1F_2} = \sqrt{5}a$ ， $\triangle F_1AB$  的面積為  $\frac{32}{3}$ ，則  $\triangle F_1AB$  的內切圓半徑為何？
2. 設數列  $\langle a_n \rangle$  中， $a_1 = \frac{\pi}{6}$ ， $a_n \in (0, \frac{\pi}{2})$ ，且  $\tan a_{n+1} \cdot \cos a_n = 1 (n \geq 1)$
- (1) 試求  $\tan^2 a_n$  的一般式。(以  $n$  表之) (5 分)
- (2) 若  $\prod_{k=1}^m \sin a_k = \frac{1}{10}$ ，則  $m = ?$  (5 分)
3. 已知兩數列  $\langle a_n \rangle, \langle b_n \rangle$ ，當  $n \in \mathbb{N}$  時恆存在下列關係： $\begin{cases} a_n = 3a_{n-1} + 5b_{n-1} \\ b_n = a_{n-1} + 7b_{n-1} \end{cases}$ ，且  $a_0 = 2, b_0 = 1$ ，求一般項  $a_n$ 。
4. 重複操作一個成功機率為  $p$  的伯努力試驗，每次試驗的結果皆是獨立的，設隨機變數  $X$  表示第一次成功發生所需要的試驗次數。(下列答案以  $p$  表之)
- (1) 計算  $E(X)$  (5 分)
- (2) 計算  $Var(X)$  (5 分)