

國立台灣師大附中 111 學年度 數學科 教師甄選 題目卷

一．填充題(1-6每格7分，7-12每格8分共90分)

1. 計算 $\sin^2 41^\circ + \sin^2 19^\circ + \sin 41^\circ \sin 19^\circ$ 的值为_____。

2. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=5, \overline{BC}=9$ ，且 $\frac{1}{\tan A}, \frac{1}{\tan B}, \frac{1}{\tan C}$ 成等差數列，試求 $\tan^2 \frac{B}{2} =$ _____。

3. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=25, \overline{AC}=30$ ， $\angle B=2\angle C$ ，且 $\angle B$ 的內角平分線交 $\triangle ABC$ 的外接圓於 D 點，且 $B、D$ 為相異點。試求 $\triangle BCD$ 的面積為_____。

4. 有長方形紙板 $ABCD$ ， $\overline{AB}=6, \overline{BC}=2\sqrt{3}$ 。若將其沿對角線 \overline{AC} 摺起，使 D 至 D' 位置。由 D' 作平面 ABC 的垂線 $\overline{D'H}$ ，其垂足 H 恰好在 \overline{AB} 邊上，此時平面 ABC 與平面 ACD' 所夾的銳角為 θ ，試求 $\tan \theta =$ _____。

5. 已知 $x、y、z$ 為三個實數且滿足
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 18 \\ y^2 + \sqrt{3}yz + z^2 = 13 \\ x^2 + xz + z^2 = 19 \end{cases}$$
，則 $2xy + yz + \sqrt{3}xz =$ _____。

6. 將3組小括弧、2組方括弧、1組角括弧排成一列，各種括弧之間沒有先後使用的規定，但是每一組括弧的左括弧必須排在右括弧的左邊，而且每一組括弧中間如果有其他括弧，則這些括弧必須是完整的一組括弧；舉例來說：

$(\langle \rangle)[()[]](\)$ 是一種合格的排列法，而 $\langle \rangle(\rangle[[]])()$ 與 $\langle \rangle \rangle[[]]()$ 都是不合格的排列法。

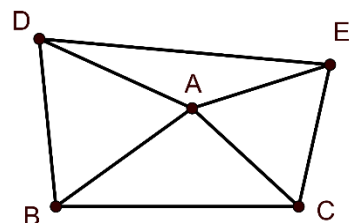
請問以上的6組括弧，共有幾種合格的排列法？ 答：_____種。

7. 已知複數 z_1, z_2, z_3 滿足
$$\begin{cases} |z_1| = |z_2| = |z_3| = 1 \\ \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 1 \end{cases}$$
，則 $|z_1 + 2z_2 + 3z_3|$ 最大可能的值為_____。

8. 已知有36位學生參加考試，其平均為60分，標準差為5分，試問至少有多少人的成績會介於(50,70)區間？ 答：_____人。

9. $|2023^{112} - 112^{2023}|$ 的末三位數字為_____。(若該位數字為0也要寫出，如001或023)

10. 如右圖，在 $\triangle ABC$ 的邊 \overline{AB} 與 \overline{AC} 的外側分別作正三角形 $\triangle ABD$ 與 $\triangle ACE$ ，已知 $\overline{AC}=1$ 且 $\overline{DE}=2$ ，則 $\triangle ABC$ 面積的最大值為_____。



11. 若多項式 $f(x)$ 滿足 $x^2 f(x) = \frac{36}{5}x^5 + 6ax^4 - 4x^3 + 2\int_a^x t f(t) dt$ ，其中 a 為實數；且 $f(0)=0$ 。試求出 $f(x)$ 與 x 軸之間所圍面積的最小值為_____。

12. 統計推論

A plant germination method is successful on average 4 times out of every 10. A horticulturist develops a new technique which she believes will improve the number of plants that successfully germinate. She takes a random sample of 50 seeds and attempts to germinate them. Suppose random variable X is defined as the number of plants that successfully germinate. Using a 5% level of significance, find the rejection region for a test to check her belief.

Ans : the rejection region is _____.

(Use the given binomial cumulative distribution function. The tabulated value is $P(X \leq x)$, where X has a binomial distribution with index n and parameter p .)

$p =$	0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50
$n = 50, x = 0$	0.0769	0.0052	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.2794	0.0338	0.0029	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	0.5405	0.1117	0.0142	0.0013	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	0.7604	0.2503	0.0460	0.0057	0.0005	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
4	0.8964	0.4312	0.1121	0.0185	0.0021	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
5	0.9622	0.6161	0.2194	0.0480	0.0070	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
6	0.9882	0.7702	0.3613	0.1034	0.0194	0.0025	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
7	0.9968	0.8779	0.5188	0.1904	0.0453	0.0073	0.0008	0.0001	0.0000	0.0000
8	0.9992	0.9421	0.6681	0.3073	0.0916	0.0183	0.0025	0.0002	0.0000	0.0000
9	0.9998	0.9755	0.7911	0.4437	0.1637	0.0402	0.0067	0.0008	0.0001	0.0000
10	1.0000	0.9906	0.8801	0.5836	0.2622	0.0789	0.0160	0.0022	0.0002	0.0000
11	1.0000	0.9968	0.9372	0.7107	0.3816	0.1390	0.0342	0.0057	0.0006	0.0000
12	1.0000	0.9990	0.9699	0.8139	0.5110	0.2229	0.0661	0.0133	0.0018	0.0002
13	1.0000	0.9997	0.9868	0.8894	0.6370	0.3279	0.1163	0.0280	0.0045	0.0005
14	1.0000	0.9999	0.9947	0.9393	0.7481	0.4468	0.1878	0.0540	0.0104	0.0013
15	1.0000	1.0000	0.9981	0.9692	0.8369	0.5692	0.2801	0.0955	0.0220	0.0033
16	1.0000	1.0000	0.9993	0.9856	0.9017	0.6839	0.3889	0.1561	0.0427	0.0077
17	1.0000	1.0000	0.9998	0.9937	0.9449	0.7822	0.5060	0.2369	0.0765	0.0164
18	1.0000	1.0000	0.9999	0.9975	0.9713	0.8594	0.6216	0.3356	0.1273	0.0325
19	1.0000	1.0000	1.0000	0.9991	0.9861	0.9152	0.7264	0.4465	0.1974	0.0595
20	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9937	0.9522	0.8139	0.5610	0.2862	0.1013
21	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9974	0.9749	0.8813	0.6701	0.3900	0.1611
22	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9990	0.9877	0.9290	0.7660	0.5019	0.2399
23	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9996	0.9944	0.9604	0.8438	0.6134	0.3359
24	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9976	0.9793	0.9022	0.7160	0.4439
25	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9991	0.9900	0.9427	0.8034	0.5561
26	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9955	0.9686	0.8721	0.6641
27	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9981	0.9840	0.9220	0.7601
28	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9993	0.9924	0.9556	0.8389
29	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9966	0.9765	0.8987
30	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9986	0.9884	0.9405
31	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995	0.9947	0.9675
32	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998	0.9978	0.9836
33	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9991	0.9923
34	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9997	0.9967
35	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9999	0.9987
36	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9995
37	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	0.9998
38	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

二·計算題(共10分，請詳列算式，否則不予計分)

牛頓法(Newton's method)是用來求方程式 $f(x)=0$ 之實根的近似值。首先選擇一個適當的實數 a_1 ，並通過點 $(a_1, f(a_1))$ 作 $y=f(x)$ 圖形的切線，切線與 x 軸交於 $(a_2, 0)$ 。再通過點 $(a_2, f(a_2))$ 作 $y=f(x)$ 圖形的切線，切線與 x 軸交於 $(a_3, 0)$ 。重複同樣的方法接續可得 $a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$ 。

(1) 若 $f(x)=x^2-2$ ， $a_1=2$ ，求 a_2 、 a_3 。(2分)

(2) 若 $f(x)=4x^3-12x^2+12x-3$ ，以 a_1 開始可得 a_2 ，但 a_2 卻無法得到 a_3 。試問 a_1 的值可能為何？

(8分)

國立台灣師大附中 110 學年度 數學科 代理教師甄選 答案卷

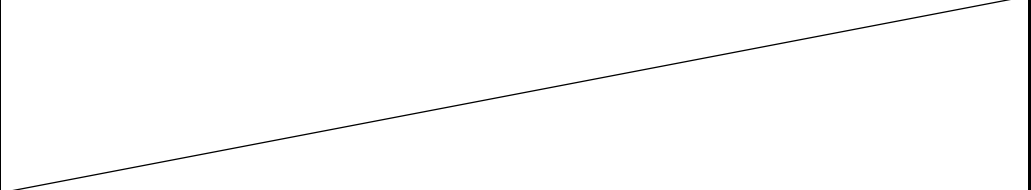
一·填充題(1-6每格7分，7-12每格8分共90分)

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12			

二·計算題(共10分，請詳列算式，否則不予計分)

國立台灣師大附中 110 學年度 數學科 代理教師甄選 答案卷

一·填充題(1-6每格7分，7-12每格8分共90分)

1	2	3	4	5
$\frac{3}{4}$	$\frac{37}{143}$	132	$2\sqrt{2}$	$6\sqrt{22}$
6	7	8	9	10
7920	$\sqrt{26}$	28	007	$1 - \frac{\sqrt{3}}{4}$
11	12			
6	$0 \leq X \leq 13$			

二·計算題(共10分，請詳列算式，否則不予計分)

(1) $a_2 = \frac{3}{2}$, $a_3 = \frac{17}{12}$

(2) $a_1 = \frac{3}{2}$