二元二次方程式圖形的判定

建國中學數學科林炯伊整理
fa108@gl.ck.tp.edu.tw

圓錐曲線矩陣

$\Gamma: ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$

可表示為$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+f=0$，或是$\begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}=0$，

令 $A=\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$，$M=\begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix}$，其中 M 稱為圓錐曲線矩陣，

令 $\delta=\det(A)=ac-\dfrac{b^2}{4}$，$\Delta=\det(M)$，則 Γ 的圖形可用下表判定：

Δ \ δ	$\delta<0$ $(b^2-4ac>0)$	$\delta=0$ $(b^2-4ac=0)$		$\delta>0$ $(b^2-4ac<0)$	
$\Delta\neq 0$	雙曲線	拋物線		$(a+c)\cdot\Delta<0$	橢圓或圓
				$(a+c)\cdot\Delta>0$	無圖形(虛橢圓或虛圓)
$\Delta=0$	兩相交直線	$d^2+e^2>4(a+c)f$	兩平行直線	一點	
		$d^2+e^2=4(a+c)f$	兩重合直線		
		$d^2+e^2<4(a+c)f$	無圖形(兩虛平行直線)		

這張表的重點在於 $\Delta\neq 0$ 時，圓錐曲線沒有退化直線或一點，圖形(若存在)必為雙曲線、拋物線或橢圓，再利用 δ 或是 b^2-4ac 的正負就能判定其圖形。說明如下：

首先，除了 δ 與 $(a+c)$，$\Delta=\det(M)$ 也是轉軸與移軸不變量[1]：

若以原點為中心，將坐標軸逆時針旋轉 θ 後

$\Gamma: ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 變成 $\Gamma': a'x'^2+b'x'y'+c'y'^2+d'x'+e'y'+f'=0$，則有

[1] 此處如果不用矩陣性質來證明，大概無法避免極度繁瑣的運算，真慶幸我們有 $\det(AB)=\det(A)\det(B)$。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$，轉軸後的圓錐曲線矩陣為 $M' = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(M') = \det\left(\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot \det(M) \cdot 1 = \det(M)$$

類似的，

若以 (h,k) 為新原點將坐標軸平移，

$\Gamma: ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ 變成 $\Gamma'': a''x''^2 + b''x''y'' + c''y''^2 + d''x'' + e''y'' + f'' = 0$，則有

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix}$$，移軸後的圓錐曲線矩陣為 $M'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & k & 1 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\det(M'') = \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & k & 1 \end{bmatrix} M \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 1 \cdot \det(M) \cdot 1 = \det(M)$$

確定了 $\Delta = \det(M)$ 也是轉軸與移軸不變量之後，再來分別討論 $\delta \neq 0$ 與 $\delta = 0$ 時的圖形：

Case1 $\delta \neq 0$ 時，

將 Γ 先移軸，使 x' 與 y' 的係數為 0，因此圓錐曲線矩陣滿足

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b'/2 & 0 \\ b'/2 & c' & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{bmatrix}$$

再將等式兩邊同左乘 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ h & k & 1 \end{bmatrix}^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & h \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -h & -k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & b'/2 & 0 \\ b'/2 & c' & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{bmatrix}$

同取 det 後可得 $\Delta \cdot 1 = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} a' & b'/2 & 0 \\ b'/2 & c' & 0 \\ 0 & 0 & f' \end{bmatrix} = f' \cdot \det \begin{bmatrix} a' & b'/2 \\ b'/2 & c' \end{bmatrix} = f'\delta \Rightarrow f' = \dfrac{\Delta}{\delta}$

所以 $\Gamma': a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2 + \dfrac{\Delta}{\delta} = 0$

再經過轉軸使$b''=0$可得 $\Gamma'': a''x''^2+c''y''^2+\dfrac{\Delta}{\delta}=0$，(注意這裡常數項$f''=\dfrac{\Delta}{\delta}$是因為轉軸不變量)

由不變量與$b''=0$有$a''c''=a''c''-\dfrac{b''^2}{4}=\delta\neq 0$，$a''c''=\delta$，

因此$\delta<0$時，a''與c''異號；因此$\delta>0$時，a''與c''同號，以下開始討論圖形：

若$\delta<0$且$\Delta\neq 0$ $\Leftrightarrow a''$與c''異號且$f''\neq 0$ $\Leftrightarrow$ 圖形為雙曲線。

若$\delta<0$且$\Delta=0$ $\Leftrightarrow a''$與c''異號且$f''=0$ $\Leftrightarrow$ 圖形為兩相交直線。

若$\delta>0$且$\Delta\neq 0$且$(a+c)\cdot\Delta<0 \Leftrightarrow a''$與$c''$同號且$(a''+c'')\cdot f''<0 \Leftrightarrow$ 圖形為橢圓或圓。

若$\delta>0$且$\Delta\neq 0$且$(a+c)\cdot\Delta>0 \Leftrightarrow a''$與$c''$同號且$(a''+c'')\cdot f''>0 \Leftrightarrow$ 無圖形(虛橢圓或虛圓)。

若$\delta>0$且$\Delta=0$ $\Leftrightarrow a''$與c''同號且$f''=0$ $\Leftrightarrow$ 圖形為一點。

Case2 $\delta=0$時，

將Γ先轉軸，使$b'=0$，得到$\Gamma': a'x'^2+c'y'^2+d'x'+e'y'+f'=0$

由於$a'c'-\dfrac{b'^2}{4}=ac-\dfrac{b^2}{4}=0$且$b'=0$，因此$a'c'=0$，不失一般性令$c'=0$。(則$a'\neq 0$，why？)

此時$\Gamma': a'x'^2+d'x+e'y'+f'=0$

若$\Delta\neq 0$，因為圓錐曲線矩陣滿足

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b/2 & d/2\\ b/2 & c & e/2\\ d/2 & e/2 & f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a' & 0 & d'/2\\ 0 & 0 & e'/2\\ d'/2 & e'/2 & f'\end{bmatrix}$$

同取det後可得 $\Delta=-a'e'^2/4$，推得$e'\neq 0$，圖形為拋物線。

若$\Delta=0$，由$\Delta=-a'e'^2/4$，推得$e'=0$，$\Gamma': a'x'^2+d'x+f'=0$

由旋轉不變量$d'^2+e'^2=d^2+e^2$，$a'+c'=a+c$，$f'=f$可知方程式$a'x'^2+d'x+f'=0$之判別式為

$d'^2-4a'f'=\left(d^2+e^2-e'^2\right)-4(a'+c')f=d^2+e^2-4(a+c)f$，故表中之判別法得證。

其中旋轉不變量$d'^2+e'^2=d^2+e^2$可經由下列推導而得，

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b/2 & d/2\\ b/2 & c & e/2\\ d/2 & e/2 & f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a' & b'/2 & d'/2\\ b'/2 & c & e'/2\\ d'/2 & e'/2 & f'\end{bmatrix}$$

將上式兩邊同左乘$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$，並且令

$$B=\begin{bmatrix}a & b/2 & d/2\\ b/2 & c & e/2\\ d/2 & e/2 & f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a' & b'/2 & d'/2\\ b'/2 & c' & e'/2\\ d'/2 & e'/2 & f'\end{bmatrix}$$

分別計算B的第$(1,3)$元與第$(2,3)$元，

有$d=d'\cos\theta-e'\sin\theta$ 與 $e=d'\cos\theta+e'\sin\theta$，

故$d^2+e^2=\left(d'\cos\theta-e'\sin\theta\right)^2+\left(d'\cos\theta+e'\sin\theta\right)^2=d'^2+e'^2$

$\boxed{\text{回答 why？}}$

若轉軸後$b'=0$且$a'=c'=0$，則有$\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & b/2\\ b/2 & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=0$

$\Rightarrow\begin{bmatrix}a & b/2\\ b/2 & c\end{bmatrix}=0\Rightarrow a=b=c=0\Rightarrow\Gamma$不是二次方程式。

練習：

1. 請判斷下列方程式所代表的圖形。

（1） $x^2+4xy+5y^2+2x+4y-7=0$

（2） $x^2-xy-2y^2+5x-y+5=0$

（3） $x^2-3xy-4y^2-x-11y-6=0$

（4） $4x^2-4xy+y^2+2x+4y+1=0$

（5） $4x^2+12xy+9y^2+2x+3y+1=0$

答：(1)橢圓 (2)雙曲線 (3)兩相交直線 (4)拋物線 (5)兩平行直線

2. 若$x^2+4xy+4y^2+kx+2y-12=0$表示兩平行直線，則$k=$____________________。

答：1