二元二次方程式的轉軸、移軸不變量與化簡方法

建國中學數學科林炯伊整理
fa108@gl.ck.tp.edu.tw

轉軸不變量

若以原點為中心，將坐標軸逆時針旋轉θ後

$\Gamma: ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 變成 $\Gamma': a'x'^2+b'x'y'+c'y'^2+d'x'+e'y'+f'=0$，則有

(1) $f'=f$

(2) $b'^2-4a'c'=b^2-4ac$

(3) $a'+c'=a+c$

證明：

Γ可表示為$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}+f=0$，

將$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$代入$\Gamma$後與$\Gamma'$比較係數，有$f'=f$與

$\begin{bmatrix} a' & b'/2 \\ b'/2 & c' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，並表示為$A'=R^TAR\cdots(*)$，

將(*)式兩邊同取$\det$，有$\det(A')=\det(R^TAR)=\det(R^T)\det(A)\det(R)=\det(A)$，

故$a'c'-b'^2/4=ac-b^2/4$，$b'^2-4a'c'=b^2-4ac$。

將(*)式兩邊同取$trace$（跡數，主對角線總和），有$trace(A')=trace(R^TAR)=trace(AR^TR)=trace(A)$

故$a'+c'=a+c$。

其中兩矩陣$A_{m\times n}$與$B_{n\times m}$之積的跡數滿足交換律，是因為

$$trace(AB)=\sum_{i=1}^{m}(AB)_{ii}=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}b_{ji}a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}(AB)_{jj}=trace(BA)$$

討論 1 $b'=0$何時發生：

將$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$代入$\Gamma$後與$\Gamma'$比較係數，

可得$b'=-2a\cos\theta\sin\theta+b\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)+2c\cos\theta\sin\theta=(c-a)\sin2\theta+b\cos2\theta$

故$b'=0$時$\Leftrightarrow(c-a)\sin2\theta+b\cos2\theta=0\Leftrightarrow\tan2\theta=\dfrac{b}{a-c}$

討論 2 $b^2-4ac=0$時：

因為$b'^2-4a'c'=b^2-4ac=0$，若轉軸使得$b'=0$，則$a'c'=0$，

Γ'就只剩$a'x'^2+d'x'+e'y'+f'=0$ 或是 $c'y'^2+d'x'+e'y'+f'=0$，圖形必為拋物線或其退化情形。

(退化情形例如$c'=0$時如果又有$e'=0$，則圖形只可能為兩平行線、兩重合線或無圖形)。

$\boxed{\text{應用}}$利用旋轉不變量將型如$ax^2+bxy+cy^2+f=0$之二元二次方程式，化簡為$a'x^2+c'y^2+f=0$

因為$a+c=a'+c'$與$b^2-4ac=-4a'c'$，將前式兩邊平方後加上後式，得到

$b^2-4ac+(a+c)^2=-4a'c'+(a'+c')^2$，$b^2+(a-c)^2=(a'-c')^2$，$a'-c'=\pm\sqrt{b^2+(a-c)^2}$

於是由方程組$\begin{cases} a+c=a'+c' \\ a'-c'=\pm\sqrt{b^2+(a-c)^2} \end{cases}$，就能快速求出$a'$與$c'$。

$\boxed{\text{移軸的不變量與一次項係數}}$

若以(h,k)為新原點將坐標軸平移，

$\Gamma: ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ 變成 $\Gamma'': a''x''^2+b''x''y''+c''y''^2+d''x''+e''y''+f''=0$，則有

（1）$a''=a$，$b''=b$，$c''=c$（二次項係數皆不會改變），$b''^2-4a''c''=b^2-4ac$，$a''+c''=a+c$

（2）$d''=2ah+bk+d$

（3）$e''=bh+2ck+e$

證明：

由$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}$可得$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x''+h \\ y''+k \end{bmatrix}$，以$x=x''+h$，$y=y''+k$代入$\Gamma$後，

$a(x''+h)^2+b(x''+h)(y''+k)+c(y''+k)^2+d(x''+h)+e(y''+k)+f=0$與$\Gamma''$比較係數即得。

$\boxed{\text{移軸公式}}$（$b^2-4ac\neq 0$）

由$\begin{cases} 2ah+bk+d=0 \\ bh+2ck+e=0 \end{cases}$解出$(h,k)$，再計算出$f''=ah^2+bhk+ck^2+dh+ek+f$，

就能得到沒有一次項的$\Gamma'': ax''^2+bx''y''+cy''^2+f''=0$

$\boxed{\text{結論}}$ $\Gamma: ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$的化簡：

先計算b^2-4ac，

若$b^2-4ac=0$，只能先轉軸，從$\tan 2\theta=\dfrac{b}{a-c}$解出$R=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$，將$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=R\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$代入$\Gamma$:後，再配方平移即得拋物線的標準式或其退化情形。

若$b^2-4ac\neq 0$，利用移軸公式化簡成$ax^2+bxy+cy^2+f'=0$，

剩下的a'與c'可利用旋轉不變量或是解出矩陣$\begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$的特徵值即可！

練習：化簡$\Gamma_1: x^2+2xy+y^2-4x-12y=0$ 與 $\Gamma_2: xy+3x-2y-10=0$

答：$\Gamma_1': x^2=2\sqrt{2}y$，$\Gamma_2': x^2/8-y^2/8=1$