國立臺南女中112學年度第一次教師甄選數學科試題

一、填充題(每題4分，共76分)

1. 將地球儀設定成一個坐標空間，其中球心為原點O，地球儀上A，B兩個城市的坐標分別為$A(1,0,0)$，$B\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，而$C$城市正好是$A$，$B$兩個城市之間最短路徑的中點，試求$C$城市的坐標為?

2. 已知二次函數$y=f(x)$的圖形通過原點，且對於任意實數t都有$f(4+t)=f(2-t)$，若$f(x-108)$的最大值為12，試求$f(9)=$

3. 設O為△ABC的外心，$\angle B=23°$，$\angle C=37°$，$\overline{BC}=5$，試求$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=$?

4. 設$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，試求$\omega^2\sum_{k=1}^{96}(-1)^{k+1}k\omega^{k-1}=$?

5. 設$f(x)=\sqrt{10x-x^2}-\sqrt{16x-x^2-60}$，求$f(x)$的最大值

6. 設z為複數且虛部不等於0，已知$|z|\in\mathbb{N}$且$\frac{z-1}{z^2}\in\mathbb{R}$，試求$z=$?

7. 圓內接四邊形$ABCD$中，$\overline{BD}=2\sqrt{5}$，且$\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{2}\overrightarrow{AD}$。則$\overline{AC}=$?

8. 小南打算接下來的9天每天都會從土司、小籠包、鍋貼三種選擇一種當作當天的早餐，但不連續兩天吃土司，則這9天早餐安排的方式有幾種？

9. 設n為正整數，若$n^2+3n+43$為完全平方數，則$n^2+3n+43$=?

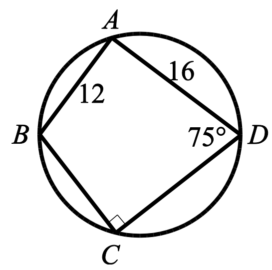
10. 坐標平面上，有一直線L和$y=x^4-3x^2+2x+3$相切於相異兩點，直線L的方程式為？

11. 已知紅箱中有紅球5個，白球3個，白箱中有紅球3個，白球5個，第一次從紅箱中取出1球，第二次按照第一次取出之球的顏色決定在與球同色的之箱中取出一球，…以此類推，即第$k+1$次是按照第k次所取出之球的顏色，而從與球同色之箱中取出一球，但每次取出之球仍放回原箱中，令P_n表第n次取出之球為紅色的機率，試求$\lim_{n\to\infty} P_n$。

12. 設正四面體$P-ABC$的高為$\overline{PO}$，M為$\overline{PO}$的中點，過$\overline{AM}$作與稜$\overline{BC}$平行的平面，將正四面體截成上下兩部分，令含P點的部分為上部分且體積為m，另一部分體積為n，試求$\dfrac{m}{n}=?$

13. 將寫有自然數$1,2,...,6$的6張紙條隨機排放成一列，先將第一張紙條拿在手中，然後從第二張紙條開始，依序看下去，直到第6張。依序看到第6張的過程中，如果看到紙條上的數目字比手中的大，就放下手中的紙條，把數目字大的那張換到手中，直到看到第6張。試求更換次數的期望值。

14. 如右圖，圓內接四邊形$ABCD$中，$\overline{AB}=12$，$\overline{AD}=16$，$\angle C=90^\circ$，$\angle D=75^\circ$，則$\overline{AC}=$



15. 設$0\le x\le 4\pi$，試求$9\cos^2 x-3\sin x-7=0$的所有根的總和。

16. 若$S_n=1+2+3+\cdots+n$，$T_n=\dfrac{S_2}{S_2-1}\times\dfrac{S_3}{S_3-1}\times\dfrac{S_4}{S_4-1}\times\cdots\times\dfrac{S_n}{S_n-1}$，其中$n=2,3,4,\cdots$。則$T_{1998}=$？

17. 已知有5個正整數，算術平均數為13，全距為18，中位數和眾數皆為9，試問第二大的數字的可能值有多少個?

18. 平面上有一直線L，已知$A(7,3)$到L的距離為6，$B(6,6)$到L的距離為3，求$C(-2,0)$到L的距離。

19. 已知多項式函數$f(x)$滿足$f''(x)-3xf'(x)+9f(x)=0$且$f(2)=6$，令$g(x)=\int_0^x f(t)dt$，試求$g(x)$的極小值。

二、計算證明題(每題 6 分，共 24 分)

1. 設整係數方程式 $ax^2+bx+c=0$ 存在有理根，試證：a 、b 、c 中至少有一個是偶數。

2. 設整數 x,y 滿足 $\log x+\log y$ 為整數，但 $\log x$ 、$\log y$ 及 $\log x^3y^2$ 都不是整數，若 x^3y^2 是一個6位數，則求所有的整數數對 (x,y) 。

3. 設 $a_k=\sqrt{1+2+\cdots+k}$ ，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\right)$

4. 已知 $a>b>0$ ，F 是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的一個焦點，$\overline{AB}$ 是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的弦且 F 在 $\overline{AB}$ 上。試證明：$\dfrac{1}{\overline{FA}}+\dfrac{1}{\overline{FB}}=\dfrac{2a}{b^2}$

一、填充題(全對才給分)

題號	答案	題號	答案	題號	答案	題號	答案
1	$\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{\sqrt{3}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$	6	$\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$	11	$\frac{1}{2}$	16	$\frac{2997}{1000}$
2	-36	7	5	12	$\frac{4}{21}$	17	6
3	$\frac{-25}{6}$	8	9136	13	$\frac{29}{20}$	18	3 或 9
4	96	9	1681	14	$5(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	19	$\frac{-1}{4}$
5	$2\sqrt{6}$	10	$y=2x+\frac{3}{4}$	15	16π		

二、計算證明題

1. 設最簡分數$\frac{q}{p}$為方程式的根，則$a\cdot(\frac{q}{p})^2+b\cdot(\frac{q}{p})+c=0$

$\Rightarrow\ a\cdot q^2+b\cdot pq+c\cdot p^2=0$

若a,b,c均為奇數，又由$(p,q)=1$可知p與q至少有一個是奇數，則

① p與q都是奇數 $\Rightarrow$ $a\cdot q^2+b\cdot pq+c\cdot p^2=0$ 矛盾（三個奇數和為奇數）

② p與q為一偶一奇 $\Rightarrow$ $a\cdot q^2+b\cdot pq+c\cdot p^2=0$ 矛盾（一奇二偶和為奇數）

由反證法得證：a,b,c中至少有一個是偶數

2. 因為x^3y^2為六位數，所以$10^5 \le x^3y^2 < 10^6$，又因為$\log x^3y^2$不是整數，所以

$10^5 < x^3y^2 < 10^6$，即$5 < \log x^3y^2 < 6$。

將$\log x^3y^2$展開，得$5 < \log x + 2(\log x + \log y) < 6 \cdots\cdots$①

因為$\log x \ge 0$，$\log y \ge 0$，所以$0 \le 2(\log x + \log y) < 6$，推得$0 \le \log x + \log y < 3$

由題意知$\log x + \log y$為整數，所以$\log x + \log y = 0,1$或2

分情況討論如下：

(1)當$\log x + \log y = 0$時，因為$\log x \ge 0, \log y \ge 0$，所以$\log x = \log y = 0$，此與題目所要求的$\log x$，$\log y$不為整數矛盾。

(2)當$\log x + \log y = 1$時，由①得$5 < \log x + 2 < 6$，推得$3 < \log x < 4$，即

$-3 < 1 - \log x < -2$。再由$\log x + \log y = 1$知$-3 < \log y < -2$，此與$\log y \ge 0$互相矛盾。

(3) 當$\log x + \log y = 2$時，由①得$5 < \log x + 4 < 6$，推得$1 < \log x < 2$，即$10 < x < 100$。再由$\log xy = \log x + \log y = 2$知$xy = 10^2 = 100$，綜合得到$\begin{cases} 10 < x < 100 \\ xy = 100 \end{cases}$，推得$1 < y < 10$。

因為y為整數，所以將$y = 2,3,4,5,6,7,8,9$逐一代入$xy = 100$，解得
$(x,y) = (50,2),(25,4),(20,5)$

3. $a_k = \sqrt{\dfrac{k(k+1)}{2}} \Rightarrow \dfrac{k}{\sqrt{2}} < a_k < \dfrac{k+1}{\sqrt{2}}$，因此$\sum_{k=1}^{n} k < \sum_{k=1}^{n} a_k < \sum_{k=1}^{n} k+1$

可得$\dfrac{n(n+1)}{2\sqrt{2}n^2} < \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k < \dfrac{(n+1)(n+2)}{2\sqrt{2}n^2}$。因為$\lim_{n\to\infty} \dfrac{n(n+1)}{2\sqrt{2}n^2} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)}{2\sqrt{2}n^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

由夾擠定理可知$\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} a_k = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$

4. 設 F' 是 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的另一個焦點，並令 $\overline{FA}=p$ 及 $\overline{FB}=q$

則 $\overline{F'A}=2a-p$ 且 $\overline{F'B}=2a-q$ 且 $\overline{F'F}=2c$ ，其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$

因 $\cos\angle F'FA=-\cos\angle F'FB$

故 $\dfrac{4c^2+p^2-(2a-p)^2}{2\times 2c\times p}=-\dfrac{4c^2+q^2-(2a-q)^2}{2\times 2c\times q}$

$4c^2q+p^2q-(2a-p)^2q=-4c^2p-pq^2+p(2a-q)^2$

$4c^2(p+q)+pq(p+q)-(4a^2-4ap+p^2)q-p(4a^2-4aq+q^2)=0$

$4c^2(p+q)+pq(p+q)-4a^2(p+q)+8apq-pq(p+q)=0$

$\dfrac{p+q}{pq}=\dfrac{2a}{b^2}$

$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{2a}{b^2}$ ，即 $\dfrac{1}{\overline{FA}}+\dfrac{1}{\overline{FB}}=\dfrac{2a}{b^2}$