多項式根冪次和的新解法

陳錦初

摘要: 當處理任意 n 次多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 的根 α_j, $j=1,2,\ldots,n$, 的 k 次方和 $\sum_{j=1}^n\alpha_j^k$ 的問題時, 很自然的會想應用各種代數轉換法將所給的式子表成其他已知的根與係數關係式 [1], 如 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n}$ 等, 以便代換求解, 但這種方法既繁瑣又困難, 若以函數微分爲基礎, 再針對 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 的級數展開式 [2]做觀察, 將可對它得到較一般化的認識, 從而導出簡易的解法。而爲了能有效的運用此一新結果, 我們將結合廣義綜合除法做實際演練, 而這裡所謂的廣義綜合除法, 是指對任意兩按降次排列的多項式的係數做一系列精簡的算術運算。

一、多項式根的冪次和

從代數基本定理知任意 n 次複係數多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 必存在 n 個根, 設其爲 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$, 因此探討根的冪次和 $\sum_{j=1}^n\alpha_j^k$, $k\geq 1$, 是個定義明確的問題。由於高次多項式根的求解並非易事, 即使以數值方法求算, 通常也只得到估計值, 所以根與係數的關係式便成爲常用的輔助工具; 當 $k=1$ 時, $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=-\alpha_{n-1}/\alpha_n$, 當 $k\geq 2$ 時, $\alpha_k^k+\alpha_2^k+\cdots+\alpha_n^k$ 的計算則需透過其他的代數轉換來處理; 譬如在 $n=2$, 即 $f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$ 的情況下, 若以不解出 α_1,α_2 値爲前提, 則 $\alpha_1^2+\alpha_2^2,\alpha_1^3+\alpha_2^3$, $\alpha_1^4+\alpha_2^4,\ldots$ 可分別以 $(\alpha_1+\alpha_2)^2-2\alpha_1\alpha_2$, $(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1^2+\alpha_2^2-\alpha_1\alpha_2)$, $(\alpha_1^2+\alpha_2^2)^2-2(\alpha_1\alpha_2)^2$ 或 $(\alpha_1+\alpha_2)(\alpha_1^3+\alpha_2^3)-\alpha_1\alpha_2(\alpha_1^2+\alpha_2^2),\ldots,$ 等代數式表示, 然後利用根與係數的條件及陸續代換後的結果即可算出 $\alpha_1^k+\alpha_2^k$, $(k\geq 2)$ 的值。這種直接計算的方式, 並無可依循的轉換通則可用, 爲彌補此缺失, 我們提出了以函數微分配合級數展開的處理方法, 以下的定理將敍述此新論點。

定理: 設 $f(x)$ 爲一佈於複數系的 n 次多項式 , α_j, $j=1,2,\ldots,n$ 爲其 n 個根。若

$$|\alpha_j|<|x|,\quad j=1,2,\ldots,n,$$

$$\text{則}\quad \frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k}{x^{k+1}},$$

$$\text{其中}\ S_k=\sum_{j=1}^n\alpha_j^k\text{。}$$

證明: 在不失一般性的假設下, 令 $f(x)=c\prod_{j=1}^n(x-\alpha_j)$, 其中 $c(\neq 0)$ 爲 $f(x)$ 的領

導係數, 則

$$\begin{aligned}
\frac{f'(x)}{f(x)} &= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x-\alpha_j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{1-\frac{\alpha_j}{x}}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left\{ \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha_j}{x}\right)^k \right\} \\
&\qquad \text{(按無窮等比級數展開)} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha_j^k}{x^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j^k}{x^{k+1}} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k}{x^{k+1}}
\end{aligned}$$

故定理得證。

此定理已指出如何從 $f'(x)/f(x)$ 的級數展開式中確認 $S_k = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^k$, 換言之, $\sum_{k=1}^{n} \alpha_j^k$ 就是 $\frac{1}{x^{k+1}}$ 項的係數。在介紹廣義綜合除法後, 我們可從範例中看到 S_k 的計算將變得十分簡單。

二、廣義綜合除法

綜合除法是以長除法爲基礎的計算模式, 爲了推廣其應用, 這裡將對所給的任意兩多項式, 設其爲 $P(x) = x^p + a_{p-1}x^{p-1} + a_{p-2}x^{p-2} + \cdots + a_1x + a_0$, 與 $Q(x) = b_qx^q + b_{q-1}x^{q-1} + b_{q-2}x^{q-2} + \cdots + b_1x + b_0$, 做 $P(x)$ 除 $Q(x)$ 的運算程序說明。首先將除式 $P(x)$ 的最高次項x^P 刪除, 所有剩餘項的係數變號並按降次排列 (缺項補零), 然後加上倒 L 型的分隔線, 再把被除式 $Q(x)$ 的所有係數同樣地按降次排列, 往下預留 p 空白列後, 畫一横向分界線, 便得如下的廣義綜合除法格式:

$$\begin{array}{c|l}
\text{除式} & \text{被除式} \\
\underline{-a_{p-1}\ -a_{p-2}\ \cdots\ -a_1\ -a_0} & b_q\ b_{q-1}\ b_{q-2}\ \cdots\ b_1\ \ b_0 \\
 & \qquad \text{演算區(預留 } p \text{ 空白列)} \rightarrow \\
 & \\
 & \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad} \\
 & \qquad \text{商式(容許往右無限延伸)} \rightarrow
\end{array}$$

至於廣義綜合除法的演算流程可依下列步驟進行:

(1) 將被除式第一行的數 (即b_q) 放横線下, 得商式首項的係數b_q。

(2) 以商式的新得係數 (如b_q) 乘以除式的各係數, 從被除式第二行 (即b_{q-1}所在的行) 起陸續將乘積按左上至右下的順序 (如下圖所示) 寫在預留的各空白列中, 再把第二行內的數相加放横線下, 得商式第二項的新係數 $b_{q-1} - b_qa_{p-1}$。

(3) 重覆步驟 (2), 每次將對應的乘積及加總往右移一行寫入各空白列及商式中, 直到所需的商式係數算出爲止。

$$\begin{array}{l|cccccc}
\underline{-a_{p-1}\quad -a_{p-2}\quad \cdots\quad -a_1\quad -a_0} & b_q & b_{q-1} & b_{q-2} & \cdots & b_1 & b_0 \\
 & & -b_qa_{p-1} & & & & \\
 & & & -b_qa_{p-2} & & & \\
 & & & & \cdots & & \\
 & & & & & -b_qa_q & \\
+) & & & & & & -b_qa_0 \\
\hline
 & b_q & b_{q-1} - b_qa_{p-1} & \cdots & & &
\end{array}$$

值得注意的是,$P(x)$ 與 $Q(x)$ 的次數大小關係並不受任何限制, 即使 $p > q$ 也不會帶來困擾, 因爲商式將以級數的形式表示。

三、範例與結論

現在以一個例子來整合前兩節所提出的理論與程序, 假設我們想知道多項式 $f(x) = x^4-2x^3+6x^2-2x+5$ 根的冪次和 $\sum_{j=1}^{4}\alpha_j^k$, $k=1,2,3,4,5,6$, 則先計算 $f'(x)=4x^3-6x^2+12x-2$, 再按廣義綜合除法列出 $\frac{f'(x)}{f(x)}$ 的商式如下:

2 -6 2 -5	4	-6	12	-2						
		8	4	-16	-44	-24	164	·	·	·
			-24	-12	48	132	72	-492	·	·
				8	4	-16	-44	-24	164	·
+)					-20	-10	40	110	60	-410
	4	2	-8	-22	-12	82	232	·	·	·
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	·	·	·
	S_0	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	·	·	·

亦即 $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{4}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{-8}{x^3} + \frac{-22}{x^4} + \frac{-12}{x^5} + \frac{82}{x^6} + \frac{232}{x^7} + \cdots$ 換言之, $\sum_{j=1}^{4}\alpha_j = 2$, $\sum_{j=1}^{4}\alpha_j^2 = -8$, $\sum_{j=1}^{4}\alpha_j^3 = -22$, $\sum_{j=1}^{4}\alpha_j^4 = -12$, $\sum_{j=1}^{4}\alpha_j^5 = 82$, $\sum_{j=1}^{4}\alpha_j^6 = 232$。若要驗證答案, 可解出 $f(x)$ 的四個根 $\alpha_1 = i$, $\alpha_2 = -i$, $\alpha_3 = 1-2i$, $\alpha_4 = 1+2i$, 再直接代換即可。本論文的最大貢獻乃在將複雜的求冪次和問題轉換成能以簡易的微分與廣義綜合除法共同處理的算術問題。

作者在論文研究期間, 對高雄建志文教關係機構黃明義主任的引導, 以及陳重達教授的經驗分享, 願藉此表示最深的謝意。

参考文獻

1. Ryan, M., Doubet, M. E., Fabricant, M., and Rockhill, T. D., 1993, Advanced Mathematics, Prentice-Hall, Inc.
2. Spiegel, Murray, 1964, Complex Variables, Schaum Publishing Company.

—本文作者任教於實踐大學高雄校區—