18. 已知 $f(x)$ 為三次多項式函數，其中三次項係數為 1，且 $f(0)=-1$、$f'(0)>0$、$f(1)\le 0$，若 $f(x)=0$ 有三實根，試證明：$f(2)\le 1$。

前言：這題其實是先想到 $f(2)=f\left(1+\left(1-0\right)\right)$，然後看到 $f(1)+\left(f(1)-f(0)\right)=2f(1)-(-1)\le 1$
才想到用 $\left(0,-1\right),\left(1,f(1)\right)$ 製造出的射線去推。

$f(x)=0$ 有三實根，所以 $f'(x)=0$ 亦有兩實根，設為 α,β 且 $\alpha\le\beta$。

因為 $f(x)$ 領導係數為 1，可設 $f'(x)=3\left(x-\alpha\right)\left(x-\beta\right)=3x^2-3\left(\alpha+\beta\right)x+3\alpha\beta$

且因為 $f(0)=-1$ 故 $f(x)=x^3-\dfrac{3}{2}\left(\alpha+\beta\right)x^2+3\alpha\beta x-1$

①由 $f'(0)>0$，可推得 $f'(0)=3\alpha\beta>0 \quad => \quad \alpha\beta>0$

②由 $f(1)\le 0$，$f(1)=1-\dfrac{3}{2}\left(\alpha+\beta\right)+3\alpha\beta-1\le 0 \;=>\; 3\alpha\beta\le\dfrac{3}{2}\left(\alpha+\beta\right) \;=>\; \alpha+\beta\ge 2\alpha\beta>0$

由①②可得 $\alpha>0,\beta>0$

③ $f(x)=0$ 有三實根，可得 $f(\alpha)\ge 0$ 且 $f(\beta)\le 0$

由 $f(\alpha)\ge 0 \;=>\; f(\alpha)=\alpha^3-\dfrac{3}{2}\alpha^3-\dfrac{3}{2}\alpha^2\beta+3\alpha^2\beta-1\ge 0$

$$=> -\frac{1}{2}\alpha^3+\frac{3}{2}\alpha^2\beta\ge 1 \;=>\; \beta\ge\frac{2}{3}\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{3}\alpha$$

$$=> \alpha+\beta\ge\frac{2}{3}\frac{1}{\alpha^2}+\frac{4}{3}\alpha=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{\alpha^2}+\alpha+\alpha\right)\ge\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{\alpha^2}\cdot\alpha\cdot\alpha}=2$$

設 $c=\dfrac{\alpha+\beta}{2}\ge 1$，則 $\left(c,f(c)\right)$ 為 $y=f(x)$ 的反曲點

設 $A=(0,f(0))$，$B=(1,f(1))$，再設 $y=g(x)$ 為過 A,B 之直線方程式

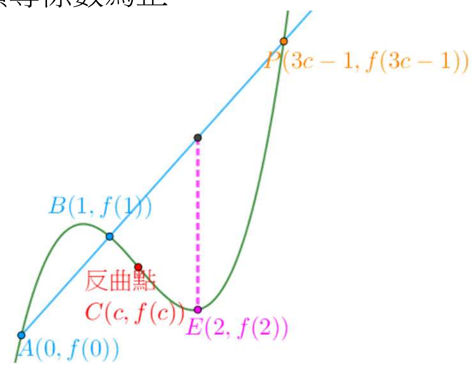
則 $y=f(x)$ 與 $y=g(x)$ 交於 $A\left(0,-1\right),B\left(1,f(1)\right),P\left(3c-1-0,f(3c-1)\right)$

因為 $f(x)$ 領導係數為正，故 $y=f(x)$ 在區間 $\left(-\infty,c\right)$ 凹向下，所以 $f(x)-g(x)$ 在區間 $\left(0,1\right)$ 為正，

而因為方程式 $f(x)-g(x)=0$ 有三相異實根 $0,\ 1,\ 3c-1$，且 $f(x)-g(x)$ 領導係數為正，

故 $f(x)-g(x)$ 在區間 $\left(0,1\right)$ 為正，在區間 $\left(1,3c-1\right)$ 為負。

即在區間 $\left[1,3c-1\right]$，$y=g(x)$ 的圖形在 $y=f(x)$ 的圖形之上(或相交)。



而 $y=g(x)$ 在 $x=2$ 之點為 $\left(2,f(1)+f(1)-f(0)\right)$，且 $3c-1\ge 3\times 1-1=2$

故 $\left(2,2f(1)-f(0)\right)$ 不低於 $\left(2,f(2)\right)$，所以 $f(2)\le 2f(1)-f(0)\le 2\times 0-(-1)=1$