

高雄市立高雄女子高級中學 110 學年度第 1 次教師甄選數學科試題

(記憶版)

計算證明題共 12 題

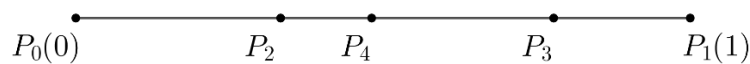
一、試求行列式 $\begin{vmatrix} \sin 40^\circ & \sin 70^\circ & -\sin 90^\circ \\ -\sin 20^\circ & -\sin 90^\circ & \sin 70^\circ \\ -\sin 90^\circ & -\sin 20^\circ & \sin 40^\circ \end{vmatrix}$ 之值。(8 分)

二、設 a, b, c, d 是非負實數，試證明：

$$(a^2 + 3)(b^2 + 3)(c^2 + 3)(d^2 + 3) \geq 9(a+b)(b+c)(c+d)(d+a) \text{。 (10 分)}$$

三、已知直線 L 通過 $O(0,0)$ 、 $P(a,b)$ ，且點 $A(x,y)$ 在直線 L 上的投影點為 $A'(x',y')$ ，設點 A 經方陣 T 線性變換後成點 A' ，求方陣 T 。(10 分)

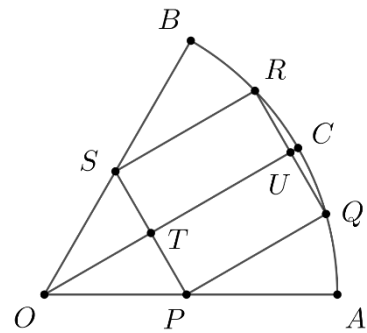
四、如圖，數線上 P_0 的坐標為 0， P_1 的坐標為 1，已知 $\overline{P_n P_{n+1}} = \frac{2}{3} \overline{P_{n-1} P_n}$ ，其中 $n \geq 1$ 。若 P_n 的坐標為 x_n ，求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 。(10 分)



五、過 $O(0,0)$ 對 $f(x) = x^3 + ax^2 + x + 1$ 可做三條相異切線，求最小整數 a 。(6 分)

六、有一半徑為 2 的半圓形碗，裝滿了水。將碗傾斜 30° ，若不計水之表面張力，則碗裡剩餘水量的最大值為何？(6 分)

- 七、如圖，從半徑為 6，圓心角為 $\frac{\pi}{3}$ 的扇形金屬材料中，剪出一個長方形 $PQRS$ ，且 \overline{PQ} 與 $\angle AOB$ 的角平分線 \overline{OC} 平行。若將長方形 $PQRS$ 彎曲，使得 \overline{PQ} 與 \overline{SR} 重合焊接成為圓柱的側面。則當圓柱側面的面積有最大值時，試求此圓柱的體積。(假設此圓柱有上下底面) (10 分)



- 八、坐標平面上有三條直線 L_1, L_2, L_3 ，其中 L_1 的斜率為 $\frac{1}{3}$ ， L_2, L_3 的斜率分別為 $\frac{4}{5}, -\frac{1}{4}$ 。已知 L_1 被 L_2, L_3 所截出的線段長為 90，則 L_1, L_2, L_3 所決定的三角形面積為何？(8 分)

- 九、已知函數 $f(x) = x^4 - 20x^2 + 2x + 37$ ，試問能否在圖形上找到四點 $A(a, f(a)), B(b, f(b)), C(c, f(c)), D(d, f(d))$ 使得 A, B, C, D 四點共線，且 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD}$ ($a < b < c < d$)？若找不到，求四個點的坐標。(10 分)

- 十、甲乙兩隊各派 7 人對戰 (上場次序已定)，若甲隊第一位輸，則甲隊派第二位，繼續和乙隊第一位對戰，直到全隊輸則對戰結束。求此對戰方式有多少方法數？(8 分)

- 十一、在 $0, 1, 2, \dots, 8, 9$ 共 10 個數字中，選 3 個相異奇數和 3 個相異偶數排成六位數。若偶數不相鄰，且奇數由小到大排列，則共有多少種排列方法？(6 分)

- 十二、設 a_n 表示與 \sqrt{n} 最接近的整數 (n 為正整數)，試求 $\sum_{k=1}^{2000} a_k$ 之值。(8 分)