

# 臺北市立第一女子高級中學 110 學年度第 2 學期高一數學科第二次期中考試題

本試卷題型均可以自行判斷採用計算器為計算工具，允許的計算器機型限定下列四款：  
E-More FX-127、Fuhbao FX-180、Canon F-502G、Casio FX-82Solar(II)

## 一、多選題(每題 10 分，共 30 分)

說明：每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項填入答案卷之指定欄位中。各題之選項獨立判定，每答對一個選項得 2 分；所有選項均未作答者，該題以零分計算。

1. 設數列  $\langle a_n \rangle$  之前  $n$  項和  $S_n = 2 \times 3^n - k$ ，其中  $k$  為常數，則下列哪些選項正確？
  - (A)  $a_2 = 12$
  - (B)  $a_5 = 27a_2$
  - (C)  $a_n = 4 \times 3^{n-1}$
  - (D) 若  $k = 2$ ， $\langle a_n \rangle$  為等比數列
  - (E)  $a_{n-1} \times a_{n+1} = (a_n)^2$ ，其中  $n \geq 3$
2. 為了研究平常小考成績跟段考成績的相關性，蒐集班上 40 位同學成績數據  $(x_i, y_i)$ ， $i = 1 \sim 40$ ，其中  $x_i$  和  $y_i$  分別表示第  $i$  號同學的小考成績和段考成績，經計算得小考成績的平均數  $\mu_x = 60$  分，標準差  $\sigma_x = 16$  分；段考成績的平均數  $\mu_y = 68$  分，標準差  $\sigma_y = 15.2$  分。已知段考成績( $y$ )對小考成績( $x$ )的最適直線  $L$  過點  $(70, 75.6)$ ，則下列哪些選項正確？
  - (A) 小考成績與段考成績呈正相關
  - (B) 最適直線斜率為  $\frac{25}{19}$
  - (C) 相關係數  $r = 0.8$
  - (D) 若將 40 筆資料標準化後，得到新數據  $(x'_i, y'_i)$ ， $i = 1 \sim 40$ ，則  $y'$  對  $x'$  的最適直線斜率為 0.76
  - (E) 若 5 號同學小考成績為 80 分，則段考成績必定為 73.2 分
3. 根據世界氣象組織(WMO)公布的熱浪定義為：連續 5 日最高氣溫高於歷年最高溫度平均值  $5^\circ\text{C}$  以上。以台北為例，歷年 7 月的平均溫度為  $34.3^\circ\text{C}$ ，則 7 月份台北必須連續 5 天最高氣溫達  $39.3^\circ\text{C}$  以上，才能符合「熱浪」定義。依此國內氣象學者建議制訂台灣的熱浪標準，例如：連續 3 天或 5 天出現最高氣溫  $35^\circ\text{C}$  或  $36^\circ\text{C}$  以上的高溫即為熱浪。今若將熱浪標準訂為「連續 5 天出現最高氣溫大於等於  $35^\circ\text{C}$ 」。已知測量後公布的數據皆為整數(單位：攝氏)，現在有甲乙丙丁四地連續 5 日最高氣溫的資訊如下：
  - 甲地：中位數為 37，眾數為 35
  - 乙地：平均數為 37，變異數為 1.2
  - 丙地：平均數為 37，眾數為 38
  - 丁地：中位數為 37，平均數 36.8，全距 5則根據上述所制訂的熱浪標準，下列哪些地區一定會符合熱浪標準？
  - (A) 甲地
  - (B) 乙地
  - (C) 丙地
  - (D) 丁地
  - (E) 皆未出現熱浪

二、填充題(每格 5 分，共 50 分，全對才給分)

1. 有 130 位同學測量 800 公尺體適能後，體育老師按其表現成果，將同學的成績轉換成 0~10 級分，並做出了右方的統計量表。請問頂標(第 88 百分位數)為\_\_\_\_\_級分。

級分	人數
10	8
9	15
8	22
7	20
6	18
5	13
4	8
3	11
2	9
1	4
0	2

2. 設 $\langle a_n \rangle$ 和 $\langle b_n \rangle$ 為等差數列，其中 $\frac{a_n}{b_n} = k$  ( $k$  為常數)，已知 $a_1 = 294$ ，  
 $a_9 = 102$ ， $b_1 = 196$ ，則 $b_5 =$ \_\_\_\_\_

3. 妞妞查看自己所投資的基金收益，近五年的投資報酬率分別為12.83%、18.04%、-11.05%、18.15%、12.95%，求近五年的年平均投資報酬率為\_\_\_\_\_%(四捨五入至小數點後第二位)

4. 設 $\langle a_n \rangle$ 為等比數列，已知 $a_7 + a_9 + a_{11} + \cdots + a_{25} + a_{27} = \frac{3}{5}$ ， $a_{10} + a_{12} + a_{14} + \cdots + a_{28} + a_{30} = 75$ ，則  
 $a_{11} + a_{13} + a_{15} + \cdots + a_{29} + a_{31} =$ \_\_\_\_\_

5. 體脂率是衡量人體體重與健康程度的指標之一，為了分析體脂率對人體總膽固醇的影響，紀錄六位女性受試者檢測後的體脂率(X)與總膽固醇(Y)，其數據如下表：

受試者編號	1	2	3	4	5	6
體脂率 X(%)	17	20	22	25	28	32
總膽固醇 Y(mg/dl)	174	180	178	184	178	186

- (1) 體脂率與總膽固醇的相關係數為\_\_\_\_\_ (請化成最簡分數)  
(2) Y 對 X 的最適直線方程式為  $y = mx + k$ ，則數對  $(m, k) =$ \_\_\_\_\_ (請化成最簡分數)

6. 研究單位將 50 位受測者隨機分組後，採 A、B 試卷施測，施測結果如下表：

	人數	平均成績(分)	標準差(分)
A 卷	30	66	8
B 卷	20	80	5

- (1) 設 A 試卷受測者的成績分別為  $a_1, a_2, \dots, a_{30}$ ，由於考量到 A 試卷的難度、施測時間與 B 試卷不同，決定採取線性調整方式得新成績為  $c_1, c_2, \dots, c_{30}$ ，調整公式為  $c_i = \frac{5}{4}a_i - \frac{5}{2}$ ， $i = 1 \sim 30$ 。若調整後的平均成績為  $\mu_c$  分，標準差為  $\sigma_c$  分，則數對  $(\mu_c, \sigma_c) =$  \_\_\_\_\_
- (2) 承上題(1)，則調整後全體受測者成績的標準差為 \_\_\_\_\_ 分

7. 小綠的理財專員推薦她一款儲蓄險保單，保單方案是每年繳 14 萬元，連續繳 6 年，十年期滿後就可以領回人生第一桶金(即 100 萬元)，並聲稱比起將這筆錢拿去銀行採零存整付的定存方案賺得多。為了檢驗理財專員的推薦方案是否值得投資，請幫小綠試算若她連續 6 年，每年初存入 14 萬元，複利計息，年利率 1.1%，十年期滿後儲蓄險保單可比零存整付定存多領 \_\_\_\_\_ 元。(四捨五入至個位數)

儲蓄險保單 (單位:元)

年	保費	累計保費	解約後可拿回
1	140000	140000	68000
2	140000	280000	181700
3	140000	420000	297950
4	140000	560000	416810
5	140000	700000	538370
6	140000	840000	874700
7	0	840000	894420
8	0	840000	914500
9	0	840000	955090
10	0	840000	1000000

零存整付定存(單位:元)

年	存入金額	累計本金	本利和
1	140000	140000	
2	140000	280000	
3	140000	420000	
4	140000	560000	
5	140000	700000	
6	140000	840000	
7	0	840000	
8	0	840000	
9	0	840000	
10	0	840000	

8. 已知  $n$  為正整數，設  $a_n$ 、 $b_n$  為方程式  $x^2 - (n^2 + 1)x - n^3 = 0$  的兩根，則

$(a_1 - 1)(b_1 - 1) + (a_2 - 1)(b_2 - 1) + \dots + (a_{20} - 1)(b_{20} - 1) =$  \_\_\_\_\_

三、混合證明題(共 20 分)

「賈憲三角」是中國古代重要的數學成就之一。  
南宋數學家楊輝在他的著作《詳解九章算術》中解釋圖一的數表，並說明  
引自北宋賈憲《釋鎖算術》，其中第  $n + 1$  列記載著  $(x + y)^n$  展開式的各項係數。

此三角形的規律與 17 世紀法國數學家巴斯卡提出金字塔型的三角形相同(圖二)，除了每行最左與最右排的數字皆為 1 以外，每個數字等於它的左上方與右上方兩個數字之和。

若今天將圖二中圈出的數字 1, 3, 6, 10, 15, ...構成數列  $\langle a_n \rangle$ ，請觀察此數列後回答下列問題：

1.  $a_{2022} - a_{2021} =$  \_\_\_\_\_ (填充，3 分)

2. 試選出數列  $\langle a_n \rangle$  的遞迴關係式(單選，5 分)

(A)  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + (2n - 2), n \geq 2 \end{cases}$

(B)  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1, n \geq 2 \end{cases}$

(C)  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + n, n \geq 2 \end{cases}$

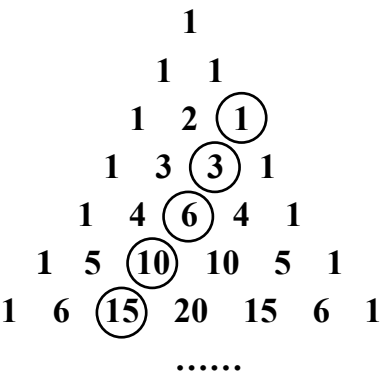
(D)  $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + \frac{n^2 - n}{2}, n \geq 2 \end{cases}$

3. 觀察數列  $\langle a_n \rangle$  的規律性後，推測數列的一般項  $a_n$  為 \_\_\_\_\_ (填充，4 分)

4. 試依據第 2 題數列的遞迴關係式，利用數學歸納法驗證第 3 題的猜測。(8 分)



圖一



臺北市立第一女子高級中學 110 學年度第 2 學期高一數學科第二次期中考答案卷

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

一、多選題(每題 10 分，共 30 分。每題有 5 個選項，至少有一個是正確選項，每個選項 2 分)

1.	2.	3.

二、填充題(每格 5 分，共 50 分)

1.	2.	3.	4.	5.(1)
5.(2)	6.(1)	6.(2)	7.	8.

三、混合證明題(共 20 分)

1.	(填充題，3 分)
2.	(單選題，5 分)
3.	(填充題，4 分)
4. 試依據第 2 題數列的遞迴關係式，利用數學歸納法驗證第 3 題的猜測。(8 分)	

臺北市立第一女子高級中學 110 學年度第 2 學期高一數學科第二次期中考答案

班級：\_\_\_\_\_ 座號：\_\_\_\_\_ 姓名：\_\_\_\_\_

一、多選題(每題 10 分，共 30 分。每題有 5 個選項，至少有一個是正確選項，每個選項 2 分)

1.	2.	3.
ABDE	AC	AB

二、填充題(每格 5 分，共 50 分)

1.	2.	3.	4.	5.(1)
9	132	9.59	375	$\frac{3}{4}$
5.(2)	6.(1)	6.(2)	7.	8.
$(\frac{3}{5}, \frac{828}{5})$	(80, 10)	$\sqrt{70}$	88013	-46970

四、混合證明題(共 20 分)

1.	2022	(填充題，3 分)
2.	C	(單選題，5 分)
3.	$\frac{n(n+1)}{2}$	(填充題，4 分)
<p>4. 試依據第 2 題數列的遞迴關係式，利用數學歸納法驗證第 3 題的猜測。(8 分)</p> <p>當 <math>n=1</math> 時，<math>a_1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1</math> 成立 (1 分)</p> <p>設 <math>n=k</math> 時，<math>a_k = \frac{k(k+1)}{2}</math> 成立 (1 分)</p> <p>則 <math>n=k+1</math> 時，<math>a_{k+1} = a_k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)[(k+1)+1]}{2}</math> 成立 (4 分)</p> <p>由數學歸納法可知，對於所有自然數 <math>n</math>，<math>a_n = \frac{n(n+1)}{2}</math> 均成立 (2 分)</p>		