112 學測數 A 詳解

1. 若在計算器中鍵入某正整數 N，接著連按「$\sqrt{\ }$」鍵(取正平方根)3 次，視窗顯示得到答案為 2，則 N 等於下列哪一個選項？

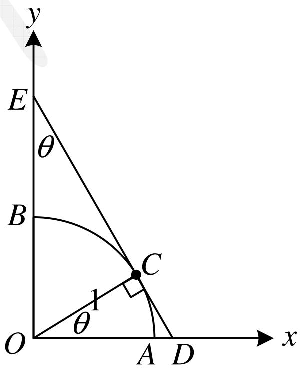
(1) 2^3 (2) 2^4 (3) 2^6 (4) 2^8 (5) 2^{12}

答案：(4)

詳解：$\sqrt{\sqrt{\sqrt{N}}}=2 \Rightarrow N=((2^2)^2)^2=2^8$

2. 坐標平面上，以原點 O 為圓心、1 為半徑作圓，分別交坐標軸正向於 A, B 兩點。在第一象限的圓弧上取一點 C 作圓的切線分別交兩軸於點 D、E，如圖所示。令 $\angle OEC=\theta$，試選出為 $\tan\theta$ 的選項。

(1) $\overline{OE}$ (2) $\overline{OC}$ (3) $\overline{OD}$ (4) $\overline{CE}$ (5) $\overline{CD}$



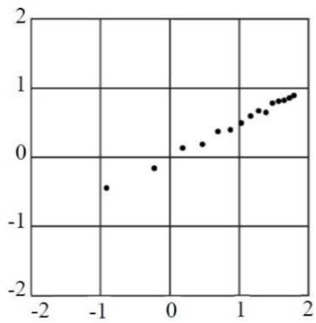
答案：(5)

詳解：$\angle OCD=\angle OCE=90^\circ$，可得 $\angle COD=\theta$

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{OC}}=\tan\theta \Rightarrow \frac{\overline{CD}}{1}=\tan\theta \Rightarrow \overline{CD}=\tan\theta$$

$$(\overline{OE}=\frac{1}{\sin\theta}, \overline{OD}=\frac{1}{\cos\theta}, \overline{CE}=\frac{1}{\tan\theta})$$

3. 某生推導出兩物理量 s , t 應滿足一等式。為了驗證其理論，他做了實驗得到 15 筆兩物理量的數據 (s_k , t_k)，$k=1,\cdots,15$。老師建議他將其中的 t_k 先取對數，在坐標平面上標出對應的點 $(s_k , \log t_k)$，$k=1,\cdots,15$，如圖所示；其中第一個數據為橫軸坐標，第二個數據為縱軸坐標。利用迴歸直線分析，某生印證了其理論。試問該生所得 s , t 的關係式最可能為下列哪一選項？



(1) $s=2t$ (2) $s=3t$ (3) $t=10^s$ (4) $t^2=10^s$ (5) $t^3=10^s$

答案：(4)

詳解：散佈圖的迴歸直線約為 $y=\frac{1}{2}x$，其中 $(x_k , y_k)=(s_k , \log t_k)$

$$y=\frac{1}{2}x \Rightarrow \log t=\frac{1}{2}s \Rightarrow 2\log t=s \Rightarrow \log(t^2)=s \Rightarrow t^2=10^s$$

4. 將數字 1、2、3、...、9 等 9 個數字排成九位數(數字不得重複)，使得前 5 位從左至右遞增、且後 5 位從左至右遞減。試問共有幾個滿足條件的九位數？

(1) $\dfrac{8!}{4!4!}$ (2) $\dfrac{8!}{5!3!}$ (3) $\dfrac{9!}{5!4!}$ (4) $\dfrac{8!}{5!}$ (5) $\dfrac{9!}{5!}$

答案：(1)

詳解：前五位遞增，後五位遞減，表示中項必為最大值 9

先將其他 8 數字任意排列，因為前四項必須遞增(即排列數為 1 種)，所以將排列除掉；後四項同理，所求為$\dfrac{8!}{4!4!}$

【另解】

將 8 個均分成兩堆，前四項須依小而大；後四項須一大而小$\Rightarrow C_4^8 \cdot C_4^4 = \dfrac{8!}{4!4!}$)

5. 已知坐標空間中P,Q,R為平面$2x-3y+5z=\sqrt{7}$上不共線三點。令

$\overrightarrow{PQ}=(a_1\,,b_1\,,c_1)$，$\overrightarrow{PR}=(a_2\,,b_2\,,c_2)$。試選出下列行列式中**絕對值**為最大的選項。

(1) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

(4) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (5) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$

答案：(2)

詳解：$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}=(\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR})\cdot(a\,,b\,,c)$

$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ 與平面$2x-3y+5z=\sqrt{7}$ 的法向量$\overrightarrow{N}=(2\,,-3\,,5)$平行

令$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=k\,\overrightarrow{N}=k\cdot(2\,,-3\,,5)$

(1) $|k(2\,,-3\,,5)\cdot(-1\,,1\,,1)|=|k(-2-3+5)|=0$

(2) $|k(2\,,-3\,,5)\cdot(1\,,-1\,,1)|=|k(2+3+5)|=|10k|$(最大)

(3) $|k(2\,,-3\,,5)\cdot(1\,,1\,,-1)|=|k(2-3-5)|=|6k|$

(4) $|k(2\,,-3\,,5)\cdot(-1\,,-1\,,1)|=|k(-2+3-5)|=|4k|$

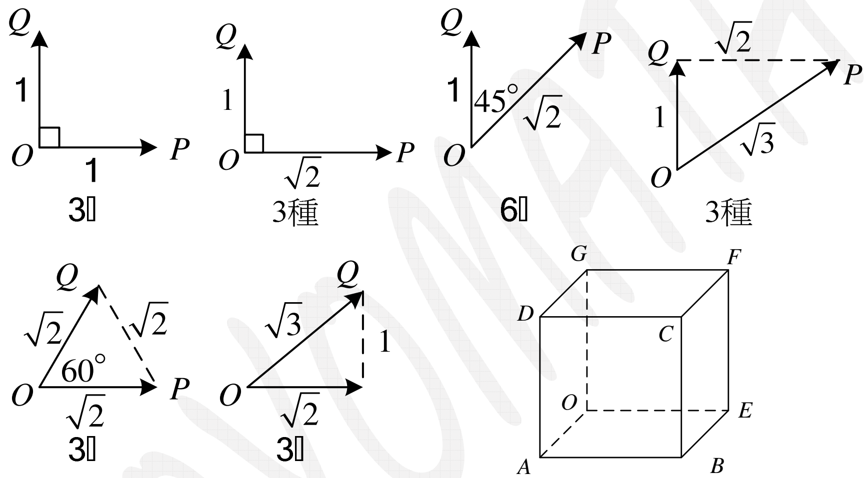
(5) $|k(2\,,-3\,,5)\cdot(-1\,,-1\,,-1)|=|k(-2+3-5)|=|4k|$

6. 坐標空間中，考慮邊長為 1 的正立方體，固定一頂點 O。從 O 以外的七個頂點隨機選取相異兩點，設此兩點為 P,Q，試問所得的內積 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$ 之期望值為下列哪一個選項？

(1) $\frac{4}{7}$ (2) $\frac{5}{7}$ (3) $\frac{6}{7}$ (4) 1 (5) $\frac{8}{7}$

答案：(3)

詳解：7 個頂點任選 2 個 $\Rightarrow C_2^7=\frac{7\times6}{2\times1}=21$ 種



X	0	$1\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$	$1\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$
P	$\frac{6}{21}$	$\frac{6}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{3}{21}$

$$E=0\times\frac{6}{21}+1\times\frac{6}{21}+1\times\frac{3}{21}+1\times\frac{3}{21}+2\times\frac{3}{21}=\frac{18}{21}=\frac{6}{7}$$

YOYOMATH

7. 某公司有甲、乙兩新進員工，兩人同時間入職且起薪相同。公司承諾給甲、乙兩員工調薪的方式如下：

甲：工作滿 3 個月，下個月開始月薪增加 200 元；以後再每滿 3 個月皆依此方式調薪。

乙：工作滿 12 個月，下個月開始月薪增加 1000 元；以後再每滿 12 個月皆依此方式調薪。

根據以上敘述，試選出正確的選項。

(1) 甲工作滿 8 個月後，第 9 個月的月薪比第 1 個月的月薪增加 600 元

(2) 工作滿一年後，第 13 個月甲的月薪比乙的月薪高

(3) 工作滿 18 個月後，第 19 個月甲的月薪比乙的月薪高

(4) 工作滿 18 個月時，甲總共領到的薪水比乙總共領到的薪水少

(5) 工作滿兩年後，在第 3 年的 12 個月中，恰有 3 個月甲的月薪比乙的月薪高

答案：(3)(5)

詳解：(1)因為甲每 3 個月加薪 200 元，8 個月後加薪 $200\times 2=400$ 元

(2)12 個月(3 個月$\times 4$)之後，甲加薪 $200\times 4=800$ 元；乙加薪 1000 元

(3)18 個月(3 個月$\times 6$)之後，甲加薪 $200\times 6=1200$ 元；乙加薪 1000 元

(4)假設甲、乙一開始月薪為 x 元

甲總共領到 $3x+3(x+200)+3(x+400)+\cdots+3(x+1000)$

$=18x+3\cdot\dfrac{(0+1000)\times 6}{2}=18x+9000$

乙總共領到 $12x+6(x+1000)=18x+6000$

(5)第 3 年初，甲月薪為 $x+200\times 8=x+1600=a$ (百元)

乙月薪為 $x+1000\times 2=x+2000=a+4$ (百元)

月	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
甲	a	a	a	$a+2$	$a+2$	$a+2$	$a+4$	$a+4$	$a+4$	$a+6$	$a+6$	$a+6$

乙月薪在這一年內均為 $a+4$ (百元)，由上表可知有 3 個月甲＞乙

8. 某抽獎遊戲單次中獎機率為 0.1，每次中獎與否皆為獨立事件。對每一正整數 n，令 p_n 為玩此遊戲 n 次至少中獎 1 次的機率。試選出正確的選項。

(1) $p_{n+1} > p_n$　(2) $p_3 = 0.3$　(3) $\langle p_n \rangle$ 為等差數列

(4) 玩此遊戲兩次以上，第一次未中獎且第二次中獎的機率等於 $p_2 - p_1$

(5) 玩此遊戲 n 次且 $n \ge 2$ 時，至少中獎 2 次的機率等於 $2p_n$

答案：(1)(4)

詳解：$p_n = P(n\text{次至少中獎一次}) = 1 - P(n\text{次均沒中獎}) = 1-(0.9)^n$

(1)因為 $(0.9)^n$ 為遞減數列，則 $1-(0.9)^n$ 為遞增數列

(2) $p_3 = 1-(0.9)^3 = 0.271 \ne 0.3$

(3) $\langle p_n \rangle = \langle 0.1, 0.19, 0.271, \cdots \rangle$ 非等差數列

(4) $P(\text{第一次未中} \cap \text{第二次中}) \overset{\text{獨立}}{=} 0.9 \times 0.1 = 0.09$

$p_2 - p_1 = 0.19 - 0.1 = 0.09$

(5)反例：$n = 2$ 時，$P(\text{至少中2次}) = 0.1 \times 0.1 = 0.01$

但 $2p_2 = 2 \times 0.19 = 0.38$，兩者不相等

yoyomath

9. 設$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$是首項為 3 且公比為$3\sqrt{3}$的等比數列。試選出滿足不等式

$\log_3 a_1 - \log_3 a_2 + \log_3 a_3 - \log_3 a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}\log_3 a_n > 18$的項數$n$之可能選項。

(1) 23　(2) 24　(3) 25　(4) 26　(5) 27

答案：(3)(5)

詳解：$\log_3 a_1 - \log_3 a_2 + \log_3 a_3 - \log_3 a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}\log_3 a_n > 18$

$$\Rightarrow \log_3(\frac{a_1}{a_2} \times \frac{a_3}{a_4} \times \cdots) > 18$$

①若n為偶數，$\left\langle \log_3(\frac{a_1}{a_2}), \log_3(\frac{a_1 \times a_3}{a_2 \times a_4}), \log_3(\frac{a_1 \times a_3 \times a_5}{a_2 \times a_4 \times a_6}), \cdots \right\rangle$

$$\Rightarrow \left\langle \log_3(\frac{1}{3\sqrt{3}}), \log_3(\frac{1}{3\sqrt{3}})^2, \log_3(\frac{1}{3\sqrt{3}})^3, \cdots \right\rangle$$

$\Rightarrow \left\langle -\frac{3}{2}, -3, -\frac{9}{2}, \cdots \right\rangle$為一等差數列(公差為$-\frac{3}{2}$)

②若n為奇數，$\left\langle \log_3(a_1), \log_3(\frac{a_1 \times a_3}{a_2}), \log_3(\frac{a_1 \times a_3 \times a_5}{a_2 \times a_4}), \cdots \right\rangle$

$$\Rightarrow \left\langle \log_3(3), \log_3(3 \times 3\sqrt{3}), \log_3[3 \times (3\sqrt{3})^2], \log_3[3 \times (3\sqrt{3})^3], \cdots \right\rangle$$

$\Rightarrow \left\langle 1, \frac{5}{2}, \frac{8}{2}, \frac{11}{2} \cdots \right\rangle$為一等差數列(公差為$\frac{3}{2}$)

(1) $n = 23$ 時，左式為$1 + 11 \times \frac{3}{2} = \frac{35}{2} = 17.5 < 18$

(3) $n = 25$ 時，左式為$17.5 + 1.5 = 19 > 18$

(5) $n = 27$ 時，左式為$19 + 1.5 = 20.5 > 18$

(2)(4)可從上述知道，當n為偶數，左式其值均為負

10. 考慮坐標平面上的直線 $L: 5y+(2k-4)x-10k=0$（其中 k 為一實數），以及長方形 $OABC$，其頂點坐標為 $O(0,0)$, $A(10,0)$, $B(10,6)$, $C(0,6)$。設 L 分別交直線 OC、直線 AB 於點 D, E。試選出正確的選項。

(1) 當 $k=4$ 時，直線 L 通過點 A

(2) 若直線 L 通過點 C， 則 L 的斜率為 $-\frac{5}{2}$

(3) 若點 D 在線段 $\overline{OC}$ 上，則 $0 \le k \le 3$

(4) 若 $k=\frac{1}{2}$，則線段 $\overline{DE}$ 在長方形 $OABC$ 內部(含邊界)

(5) 若線段 $\overline{DE}$ 在長方形 $OABC$ 內部(含邊界)，則 L 的斜率可能為 $\frac{3}{10}$

答案：(1)(3)(5)

詳解：(1)當 $k=4$ 時，直線 L 為 $4x+5y-40=0$ 通過點 $A(10,0)$

(2) $C(0,6)$ 代入直線 $L \Rightarrow 30+0-10k=0 \Rightarrow k=3$

直線 L 為 $2x+5y-30=0$，其斜率為 $-\frac{2}{5}$

(3)點 D 為直線 L 與 y 軸的交點，$x=0$ 代入直線 L

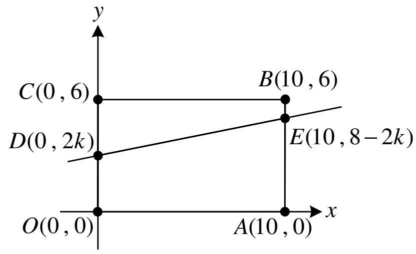
$\Rightarrow 5y-10k=0 \Rightarrow y=2k$

因為點 D 需在線段 $\overline{OC}$ 上 $0 \le y=2k \le 6 \Rightarrow 0 \le k \le 3$

(4)若 $k=\frac{1}{2}$ 時，直線 L 為 $-3x+5y-5=0$

點 D 為 $(0,1)$；點 E 為 $(10,7)$

線段 $\overline{DE}$ 非在長方形 $OABC$ 內部



(5)須讓點 D 在線段 $\overline{OC}$ 上，且點 E 在線段 $\overline{AB}$ 上

點 D 為 $(0,2k)$；點 E 為 $(10,8-2k) \Rightarrow \begin{cases} 0 \le 2k \le 6 \\ 0 \le 8-2k \le 6 \end{cases} \Rightarrow 1 \le k \le 3$

若直線斜率為 $-\frac{2k-4}{5}=\frac{3}{10} \Rightarrow k=\frac{5}{4}$ (介於範圍內)

【另解】直線斜率為 $-\frac{2k-4}{5}=\frac{4-2k}{5}$

$1 \le k \le 3 \Rightarrow -6 \le -2k \le -2 \Rightarrow \frac{-2}{5} \le \frac{4-2k}{5} \le \frac{2}{5}$ (斜率可能為 $\frac{3}{10}$)

11. 坐標平面上，設 A,B 分別表示以原點為中心，順時針、逆時針旋轉 90° 的旋轉矩陣。設 C,D 分別表示以直線 $x=y$ 、 $x=-y$ 為鏡射軸的鏡射矩陣。試選出正確的選項。

(1) A,C 將點 $(1,0)$ 映射到同一點　　(2) $A=-B$

(3) $C=D^{-1}$　　(4) $AB=CD$　　(5) $AC=BD$

答案：(2)(5)

詳解：A 為順時針旋轉 90° 的旋轉矩陣 $\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ -\sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

B 為逆時針旋轉 90° 的旋轉矩陣 $\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

C 為以 $y=(\tan 45^\circ)x$ 的鏡射矩陣 $\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

D 為以 $y=(\tan 135^\circ)x$ 的鏡射矩陣 $\Rightarrow \begin{bmatrix} \cos 270^\circ & \sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & -\cos 270^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

(1) $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$；$C\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $-B = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = A$

(3)因為 D 為鏡射矩陣，則反方陣 $D^{-1}=D\neq C$

(4) $A\cdot B$ 為逆時針旋轉 90° 再順時針旋轉 $90^\circ \Rightarrow A\cdot B=I$

$C\cdot D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$

(5) $AC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$BD = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

12. 令 $f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x$，試選出正確的選項。

(1) 鉛直線 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 為 $y=f(x)$ 圖形的對稱軸

(2) 若鉛直線 $x=a$ 和 $x=b$ 均為 $y=f(x)$ 圖形的對稱軸，則 $f(a)=f(b)$

(3) 在區間 $[0,2\pi)$ 中僅有一個實數 x 滿足 $f(x)=\sqrt{3}$

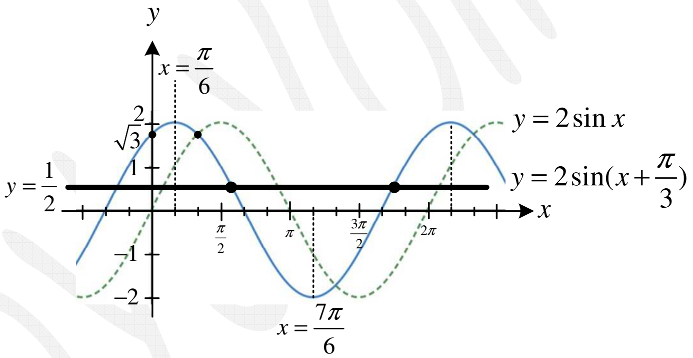
(4) 在區間 $[0,2\pi)$ 中滿足 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 的所有實數 x 之和不超過 2π

(5) $y=f(x)$ 的圖形可由 $y=4\sin^2\dfrac{x}{2}$ 的圖形經適當(左右、上下)平移得到

答案：(1)(5)

詳解：$f(x)=\sin x+\sqrt{3}\cos x=2(\sin x\cdot\dfrac{1}{2}+\cos x\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2})=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$

$f(x)$ 為 $y=2\sin x$ 往左平移 $\dfrac{\pi}{3}$(平移兩小格)(如下圖)



(1) $x=\dfrac{\pi}{6}$ 為 $y=f(x)$ 的對稱軸　　【另解】判斷 $x=\dfrac{\pi}{6}$ 代入是否為極值

(2)由圖可知對稱軸有無限多條

(3)由圖可知，有兩處滿足 $f(x)=\sqrt{3}$

【另解】$2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{3}\Rightarrow\sin(x+\dfrac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\Rightarrow x=0,\dfrac{\pi}{3}$

(4)由圖可知 $f(x)=\dfrac{1}{2}$ 有兩實數解，且兩實數解對稱於 $x=\dfrac{7\pi}{6}$

所求兩根和為 $\alpha+\beta=\dfrac{7\pi}{6}\times 2=\dfrac{7\pi}{3}$

(5) $y=4\sin^2\dfrac{x}{2}=4(\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}})^2=2-2\cos x$

($y=-2\cos x+2$ 與 $f(x)=2\sin(x+\dfrac{\pi}{3})$ 的振幅、週期相同，則可平移而得)

13. 某間新開幕飲料專賣店推出果汁、奶茶、咖啡三種飲料，前 3 天各種飲料的銷售數量（單位：杯）與收入總金額（單位：元）如下表，例如第一天果汁、奶茶、咖啡的銷售量分別為 60 杯、80 杯與 50 杯，收入總金額為 12900 元。已知同一種飲料每天的售價皆相同，則咖啡每杯的售價為_______元。

	果汁(杯)	奶茶(杯)	咖啡(杯)	收入總金額(元)
第 1 天	60	80	50	12900
第 2 天	30	40	30	6850
第 3 天	50	70	40	10800

答案：80

詳解：設果汁、奶茶、咖啡分別一杯售價為 x, y, z

$$\begin{cases}60x+80y+50z=12900\\30x+40y+30z=6850\\50x+70y+40z=10800\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6x+8y+5z=1290\cdots\cdots①\\3x+4y+3z=685\cdots\cdots②\\5x+7y+4z=1080\cdots\cdots③\end{cases}$$

題目只求咖啡的售價，可由①、②兩式加減消去法而得

①−②×2 $\Rightarrow z=80$

14. 設 a, b 為實數(其中 $a>0$)，若多項式 $ax^2+(2a+b)x-12$ 除以 $x^2+(2-a)x-2a$ 所得餘式為 6，則數對 $(a, b)=$________

答案：$(3,-9)$

詳解：由除法原理：$ax^2+(2a+b)x-12=[x^2+(2-a)x-2a]\cdot Q(x)+6$

可觀察發現 $Q(x)=a$

可得右式 $[x^2+(2-a)x-2a]\cdot a+6=ax^2+(2a-a^2)x+(6-2a^2)$

與左式比較係數 $\Rightarrow\begin{cases}\cancel{2a}+b=(\cancel{2a}-a^2)\\-12=6-2a^2\end{cases}\Rightarrow$ 可先得 $a=\pm3(-$不合$)$

再代回第一式得 $b=-9$

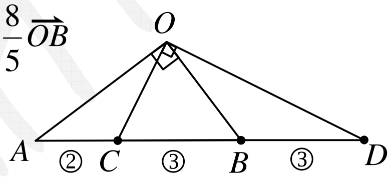
15. 設 O, A, B 為坐標平面上不共線三點，其中向量 $\overrightarrow{OA}$ 垂直 $\overrightarrow{OB}$。若 C, D 兩點在直線 AB 上，滿足 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OB}$、$3\overline{AD}=8\overline{BD}$，且 $\overrightarrow{OC}$ 垂直 $\overrightarrow{OD}$，則 $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=$______ (化為最簡分數)

答案：$\dfrac{3}{4}$

詳解：由 $\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ 可得 $\overline{AC}:\overline{BC}=2:3$ (向量的內分點公式)

又 $\overline{AD}:\overline{BD}=8:3$，可得 $\overline{AC}:\overline{BC}:\overline{BD}=2:3:3$

由圖可得 $\overrightarrow{OB}=\dfrac{3}{8}\overrightarrow{OA}+\dfrac{5}{8}\overrightarrow{OD}\Rightarrow\overrightarrow{OD}=-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{8}{5}\overrightarrow{OB}$



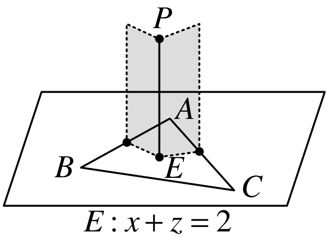
因為 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{OD}\Rightarrow\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=0$

$\Rightarrow(\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{5}\overrightarrow{OB})\cdot(-\dfrac{3}{5}\overrightarrow{OA}+\dfrac{8}{5}\overrightarrow{OB})=0$ (其中 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$)

$\Rightarrow-\dfrac{9}{25}|\overrightarrow{OA}|^2+\dfrac{16}{25}|\overrightarrow{OB}|^2=0\Rightarrow16|\overrightarrow{OB}|^2=9|\overrightarrow{OA}|^2\Rightarrow\dfrac{|\overrightarrow{OB}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\dfrac{3}{4}$

16. 令 $E:x+z=2$ 為坐標空面中過三點 $A(2,-1,0)$, $B(0,1,2)$, $C(-2,1,4)$ 的平面。另有一點 P 在平面 $z=1$ 上且其於 E 之投影點與 A, B, C 三點等距離。則點 P 與平面 E 的距離為______。(化為最簡根式)

答案：$2\sqrt{2}$



詳解：如圖，點 E 為 $\triangle ABC$ 的外心

點 P 在 AB 中垂面上且在 AC 中垂面上

AB 中垂面：$\overrightarrow{N_1}=\overrightarrow{AB}=(-2,2,2)//(1,-1,-1)$

且過 AB 中點 $(1,0,1)$，得 $E_1:x-y-z=0$

AC 中垂面：$\overrightarrow{N_2}=\overrightarrow{AC}=(-4,2,4)//(2,-1,-2)$

且過 AC 中點 $(0,0,2)$，得 $E_2:2x-y-2z=-4$

$P:\begin{cases}x-y-z=0\\2x-y-2z=-4\\z=1\end{cases}\Rightarrow P(-3,-4,1)$　　所求 $d(P,E)=\dfrac{|-3+1-2|}{\sqrt{1^2+1^2}}=2\sqrt{2}$

17. 坐標空間中有兩不相交直線 $L_1:\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=2+t\end{cases}$，$t$ 為實數、$L_2:\begin{cases}x=2+2s\\y=5+s\\z=6-s\end{cases}$，$s$ 為實數，

另一直線 L_3 與 L_1, L_2 皆相交且垂直。若 P, Q 兩點分別在 L_1, L_2 上且與 L_3 之距離皆為 3，則 P, Q 兩點的距離為________。(化為最簡根式)

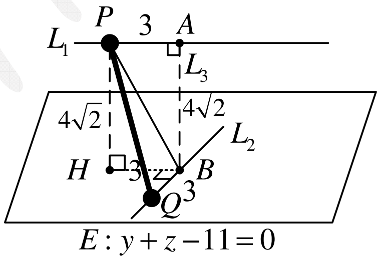
答案：$5\sqrt{2}$

詳解：L_1, L_2 兩直線不相交、不平形，則兩直線為歪斜線，且 L_3 為公垂線

需發現 $\overrightarrow{L_1}\cdot\overrightarrow{L_2}=(1,-1,1)\cdot(2,1,-1)=2-1-1=0\Rightarrow\overrightarrow{L_1}\perp\overrightarrow{L_2}$

如圖的平面 E 為包含 L_2 且平行 L_1 的平面

因為 $\overrightarrow{L_1}\perp\overrightarrow{L_2}$，則 L_1 投影在平面 E 的線與 L_2 垂直



① P, Q 與 L_3 的距離均為 $3\Rightarrow\overline{AP}=\overline{BQ}=3$

② 作 P 關於平面 E 的投影點 H

可知 $\overline{AB}=\overline{PH}$ 且 $\overline{AP}=\overline{BH}=3$

③ $\overline{AB}$ 為兩歪斜線的距離，即 $d(L_1, E)=\dfrac{|1+2-11|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=4\sqrt{2}$

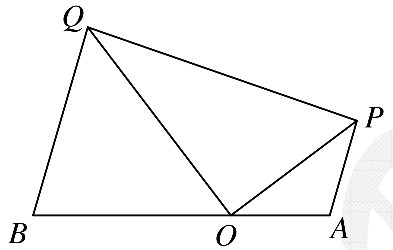
所求為 $\overline{PQ}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{3^2+3^2+(4\sqrt{2})^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$

【求平面 E】$\overrightarrow{L_1}\times\overrightarrow{L_2}=(1,-1,1)\times(2,1,-1)=(0,3,3)//(0,1,1)=\overrightarrow{N}$

得 $E: y+z-11=0$ (代 L_2 上一點 $(2,5,6)$)

18-20 題為題組

坐標平面上 O 為原點，給定 $A(1,0)$, $B(-2,0)$ 兩點。另有兩點 P, Q 在上半平面，且滿足 $\overline{AP}=\overline{OA}$、$\overline{BQ}=\overline{OB}$、$\angle POQ$ 為直角，如圖所示。令 $\angle AOP=\theta$。根據上述，試回答下列問題。



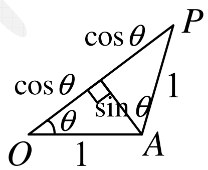
18. 線段 $\overline{OP}$ 長為下列哪一選項？(單選題，3 分)

(1) $\sin\theta$ (2) $\cos\theta$ (3) $2\sin\theta$ (4) $2\cos\theta$ (5) $\cos 2\theta$

答案：(4)

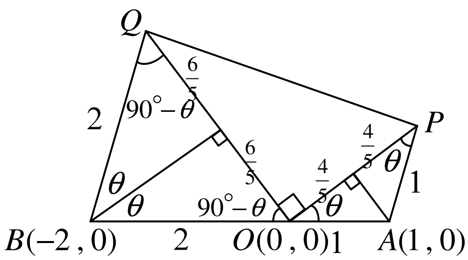
詳解：因為 $\overline{AP}=\overline{OA}$，則 $\triangle OAP$ 為等腰三角形

如圖，$\overline{OP}=2\cos\theta$



19. 若 $\sin\theta=\dfrac{3}{5}$，試求點 Q 的坐標，並說明 $\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$。(非選擇題，6 分)

答案：$Q(\dfrac{-36}{25},\dfrac{48}{25})$



詳解：$\sin\theta=\dfrac{3}{5}$, $\cos\theta=\dfrac{4}{5}$

$\overline{OP}=2\cos\theta=\dfrac{8}{5}$，$\overline{OQ}=4\sin\theta=\dfrac{12}{5}$

$$Q=\frac{12}{5}(\cos(90^\circ+\theta),\sin(90^\circ+\theta))=\frac{12}{5}(-\sin\theta,\cos\theta)$$

$$=\frac{12}{5}(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})=(-\frac{36}{25},\frac{48}{25})$$

$$P=\frac{8}{5}(\cos\theta,\sin\theta)=\frac{8}{5}(\frac{4}{5},\frac{3}{5})=(\frac{32}{25},\frac{24}{25})$$

$$\overrightarrow{BQ}=(\frac{14}{25},\frac{48}{25}),\ \overrightarrow{AP}=(\frac{7}{25},\frac{24}{25})\Rightarrow\overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$$

YOYOMATH

【另解】$\angle QBO=2\theta$ 且 $\angle PAO$ 的外角為 $2\theta \Rightarrow \overline{BQ}//\overline{AP}$

又 $\overline{BQ}=2\overline{AP} \Rightarrow \overrightarrow{BQ}=2\overrightarrow{AP}$

20. (承 19 題)試求點 A 到直線 BQ 的距離，並求四邊形 $PABQ$ 的面積。
(非選擇題，6 分)

答案：距離 $=\dfrac{72}{25}$ ，面積 $=\dfrac{108}{25}$

詳解：$\overrightarrow{BQ}=(\dfrac{14}{25},\dfrac{48}{25})//(7,24)=\overrightarrow{L} \Rightarrow$ 直線 BQ 的斜率為 $\dfrac{24}{7}$

得直線 BQ 為 $24x-7y+48=0$

$$d(A,\text{直線}BQ)=\frac{|24-0+48|}{\sqrt{24^2+7^2}}=\frac{72}{25}$$

四邊形 $PABQ$ 面積為 $\dfrac{(1+2)\times\dfrac{72}{25}}{2}=\dfrac{108}{25}$

YOYOYOMATH