臺北縣立高中職98學年度教師聯合甄選

數學科試題

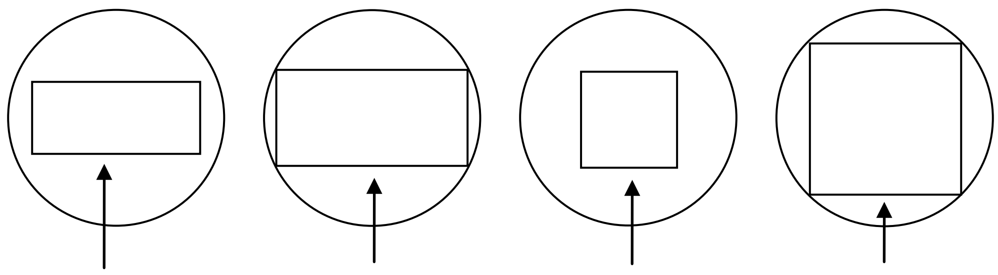
考生作答說明：
一、 請先檢視答案卡個人資料與准考證是否相符？如果不符，請立即向監試人員反應。
二、 本試題計10題選擇題，答案為單選題，依題意於A、B、C、D四個選項中擇一作答。
填充題5題，計算題2題。
三、 題目如涉及計算，禁止使用電子計算功能設備運算。
四、 請使用黑色2B鉛筆於答案卡上畫記作答，禁止使用立可白塗改，以免無法判讀。
五、 答案卡、答案本（卷）與試卷須一起繳交，始可離開試場。

一、 選擇題：20%，每題2分

（A）1. 一副52張的撲克牌洗牌後，梅花K在最上面或最下面的機率是多少？

（A）$\frac{1}{52}+\frac{1}{52}$　（B）$\frac{1}{52}\times\frac{1}{52}$　（C）$\frac{1}{52}\times\frac{1}{51}$　（D）$1-(\frac{1}{52}\times\frac{1}{51})$

（C）2. 已知一個正方體內接一個球，過球心作一截面，則下列甲、乙、丙、丁圖形中哪些可能為截面？



圓內長方形（甲）　內接長方形（乙）　圓內正方形（丙）　內接正方形（丁）

（A）僅甲丙　（B）僅乙丁　（C）僅甲乙丙　（D）僅乙丙丁

（C）3. 設$\bar{a}$, $\bar{b}$為平面上兩個互相垂直的單位向量。若向量$\bar{m}$滿足$(\bar{m}-\bar{a})\cdot(\bar{m}-\bar{b})=0$，則$|\bar{m}|$的最大值為何？

（A）1　（B）2　（C）$\sqrt{2}$　（D）$\frac{\sqrt{2}}{2}$

（B）4. 設$f(x)=x\cdot[-x^4]$, 其中$[x]$表示不大於x的最大整數，則下列何者正確？

（A）$f(x)$在$x=0$不可微分　（B）$f(x)$在$x=0$可微分且$f'(0)=-1$

（C）$f(x)$在$x=0$可微分且$f'(0)=0$　（D）$f(x)$在$x=0$可微分且$f'(0)=1$

（D）5. 設 $ABCD$ 為 $\mathbb{R}^3$ 上的一個平行四邊形。已知 A 點坐標為（1, 2, 3）且 B 與 D 在平面 $x+y+z=0$ 的投影點坐標分別為 $(2,1,-3)$ 和 $(3,-2,-1)$. 試問下列何者為 C 點在 $x+y+z=0$ 的投影點坐標？

（A）$(1,-3,2)$　　（B）$(-2,3,-1)$　　（C）$(5,-6,1)$　　（D）$(6,-1,-5)$

（B）6. 下列大小關係何者正確?

（A）$\log_8 0.6 < 6^{0.8} < (0.8)^2$　　（B）$\log_8 0.6 < (0.8)^2 < 6^{0.8}$

（C）$(0.8)^2 < 6^{0.8} < \log_8 0.6$　　（D）$(0.8)^2 < \log_8 0.6 < 6^{0.8}$

（A）7. 設 $F(x)=\int_0^{x^2}\frac{1}{1+\sin^2 t}dt$, 則導函數 $F'(x)$ 為何?

（A）$\frac{2x}{1+\sin^2 x^2}$　　（B）$\frac{1}{1+\sin^2 x}$　　（C）$\frac{1}{1+\sin^2 x^2}$　　（D）$\frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$

（D）8. 若 A 為 3 階方陣且 $A^3=2A$, 則下列何者<u>可能</u>為 A 之行列式值?

（A）$\sqrt{2}$　　（B）$\sqrt[3]{2}$　　（C）-2　　（D）$-2\sqrt{2}$

（A）9. 設 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 為正項收斂級數, 則下列何者<u>不一定</u>為收斂級數?

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}$　　（B）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$　　（C）$\sum_{n=1}^{\infty}{a_n}^2$　　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$

（B）10. 設 C 表所有複數所成的集合, 函數 $f: C \to C$ 定義為 $f(z)=iz$（$i=\sqrt{-1}$）, 設 $A=\{z\in C \| z-1 | =1\}$, 則下列四個敘述中哪些是正確的?

甲、對任意 $z_2 \in A$, 存在 $z_1 \in A$ 滿足 $f(z_1)=z_2$

乙、設 $\omega \in A$, 則 $0, \omega, f(\omega)$ 三點在複數平面上形成一個等腰直角三角形

丙、設 $z \in A$, 存在一正整數 n 使得 $\underbrace{f\circ f\circ \ldots \circ f}_{n}(z)=z$

丁、$f(A)\subset A$

（A）僅甲乙正確　　（B）僅乙丙正確

（C）僅丙丁正確　　（D）僅甲乙丙正確

二、填充題：30%，每題 6 分

1. 將 24 顆相同的球投入甲, 乙, 丙三個箱子, 每一個箱子至少有一顆球且各箱子的球數均不相同, 則有<u>　222　</u>種方法數

2. 在直角坐標平面上, 設點 $P(-3,0)$ 且點 A 在 x 軸的正半軸（包含原點）上移動, 點 B 在 y 軸上移動, 且 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{BA}=0$, 點 C 在直線 AB 上且滿足 $2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{CA}=\vec{0}$, 則點 C 的軌跡方程式為 $\underline{y^2=4x}$

3. 在直角坐標平面上，O 為原點，$A(2,0)$, $B(2,2)$，向量 $\overrightarrow{BC}=(\sqrt{2}\cos\alpha,\sqrt{2}\sin\alpha)$，則 $\overrightarrow{OC}$ 與 $\overrightarrow{OA}$ 的夾角 θ 範圍為 $\underline{\frac{\pi}{12}\le\theta\le\frac{5\pi}{12}}$

4. 設數列 $\langle a_n\rangle$ 定義為：$a_1=1$，且當 $n\ge 2$ 時，$a_n=\begin{cases} a_{\frac{n}{2}}+1 (n\text{為偶數}) \\ \dfrac{1}{a_{n-1}} (n\text{為奇數}) \end{cases}$，已知 $a_n=\dfrac{30}{11}$，則 $n=$ $\underline{236}$

5. 設 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 則 $f(x,y,z)$ 在兩平面 $3x-y+z=6$, $x+2y+2z=2$ 的交線上最小值為 $\underline{\frac{148}{45}}$

三、計算題：50%，每題 25 分

1. (1) x 為實數，求 $\sin x\cos x$ 的最大值及最小值分別為何？（6 分）

   (2) x 為實數，求 $\dfrac{\sin x+\cos x}{1+\sin x\cdot\cos x}$ 的最大值及最小值分別為何？（7 分）

   (3) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin x+\cos x}{1+\sin x\cdot\cos x}dx=$？（12 分）

2. 已知雙曲線 $C:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$, 其兩焦點為 F,F'. 設 $P(x_0,y_0)$ 為 C 上異於頂點的任意點, 且設△PFF' 的內切圓與 x 軸切於點 M.

   (1)求 M 與兩焦點的距離各是多少?（12 分）

   (2)當 $x_0\to\infty$, 時, 內切圓圓心的 y 坐標之極限值為何?（13 分）