本校數理資優班考試參考書目：

1. 幾何明珠　黃家禮編著　九章出版社
2. 初中數學競賽教程　 九章出版社
3. 國高中數學銜接教材（http://www.wlsh.tyc.edu.tw/math.php）

以下試題為本校資優班考試參考試題，所需工具以國中教材為主。

一、單選題

1．定義運算：當 $A \le B$ 時，$A*B=A$；當 $A>B$ 時，$A*B=B$。依此運算規則，若 $1*B=1$，則 B 的取值範圍是(1)$0<B<1$　(2)$B<1$　(3)$0<B\le 1$　(4)$B\ge 1$　(5)$B\le 1$

2．在 100 個學生的隊伍中(編號由 1 到 100)，所有的學生原本都立正。老師想測驗大家的反應速度，便規定一個遊戲規則：當老師喊一個數字時，凡編號是這個數字的倍數者就改變姿勢，即立正者改為稍息，稍息者改為立正。老師由 2、3、4、…依序喊到 100 就停止。則下列哪位學生最後姿勢為立正？

(1) 20 號　(2) 36 號　(3) 38 號　(4) 60 號　(5) 95 號　。

3．請問下列各數何者能表示成連續 100 個正整數的和？

(1)1627384950　(2)2345678910　(3)4692581470　(4)3579111300　(5)5815937260

4．有三張紙牌，上面各標示著一個正整數，將有數字的面朝下蓋在桌子上，S、H 和 E 三人已經知道了以下資料：

A.　三張牌的號碼皆不一樣

B.　三張牌的數字總和為 13

C.　此三張牌從左到右，有遞增的順序

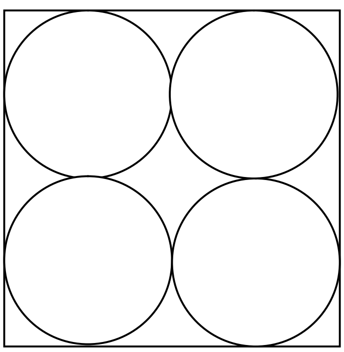
首先 S 看了最左邊的那一張牌，她說：「沒有足夠的資訊去決定另兩張牌的號碼」。然後 H 聽了 S 的話再看了最右邊的那一張牌說：「我沒有足夠的資訊去決定另兩張牌的號碼」。最後，E 聽完了 S 與 H 的話再看了中間的那一張牌，然後說：「我仍然沒有足夠的資訊去決定另兩張牌的號碼」。請問中間那張牌的號碼是

(1) 2　(2) 3　(3) 4　(4) 5　(5)沒有足夠的資訊判斷。

5．把四個半徑為 1 的球放在一個水平的板子上，使得每一個球與另外兩個球相接觸，此時這四個球的球心形成一個正方形，其俯視圖如下圖所示。再取大小相同的第五個球疊放在這四個球的正中央上方，則第五個球的最高點距離板子的高度為

(1)$2+\sqrt{2}$　(2) 3　(3)$1+\sqrt{2}$　(4)　$2+\sqrt{3}$　(5) 4　。

Ans：(1)



6.將 6 顆相同的糖果分裝到四個沒有任何標籤的袋子裡，請問有幾種分裝方法？
（糖果需全裝入袋子內，但是每個袋子內不一定有糖果）

(1)6　(2) 7　(3)8　(4) 9　(5) 10 種。

Ans：(4)

7. 牆上有 6 個燈泡，由左到右分別編號為 1~6 號，擲一個骰子一次，編號與出現點數相同的燈泡就會改變狀態(改變狀態是指：由暗變亮，或由亮變暗)。設一開始 6 個燈泡都是暗的，在大雄擲了三次骰子之後，6 個燈泡中，恰好亮 2 個的機率是多少？

(1) 0　(2) $\frac{1}{4}$　(3) $\frac{1}{3}$　(4) $\frac{1}{2}$　(5) $\frac{2}{3}$

Ans： (1)

8.已知可找到 a、b 為正整數，使得 $123456789=(11111+a)(11111-b)$，則下列敘述何者正確？

(1) a 為奇數 (2) b 為奇數 (3) a、 b 是一奇數一偶數 (4) $a < b$　(5) $a-b$ 是 4 的倍數

Ans：(5)

二、選填題

A. 甲罐中裝有甲種液體 4 公斤，乙罐中裝有乙種液體 2 公斤，丙罐中裝有丙種液體 2 公斤，這些液體都是可混合的。將甲罐中的液體分別倒入乙罐和丙罐中各 1 公斤，混合後又將乙罐和丙罐中的各 1 公斤液體倒回甲罐，這樣稱爲 1 次混合，以後每次混合都按這種方法操作。問：經過這樣的 2 次混合之後，乙罐中的丙種液體爲 $\dfrac{⑤}{⑥}$ 公斤。

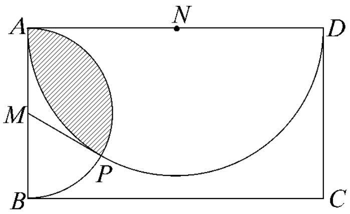
B. 在下面的乘法算式中，每個字母代表 0 , 1 , 2 ,…. , 9 中的一個數字，而且不同的字母代表不同的數字。

$$
\begin{array}{r}
A \\
\times \quad C\,B \\
\hline
E\,D \\
G\,F \\
\hline
D\,D\,D
\end{array}
$$

請問：D 代表的數字爲 ⑦ 。

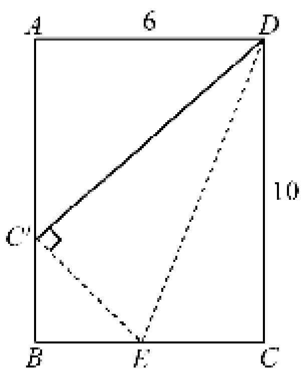
C. 一個鋼筋做成的三角形，三邊長分別爲 20cm、50cm、60cm，現在要再做一個與其相似的鋼筋三角形，而只有長爲 30cm 和 50cm 的兩根鋼筋，要求以其中一根爲一邊，從另一根上截下兩段(允許有剩下)作爲另兩邊，則不同的截法有 ⑧ 種。

D. 如下圖，一長方形 $ABCD$ 中，已知 $\overline{AB}=24$，$\overline{AD}=24\sqrt{3}$。今分別以 M、N 爲圓心，$\overline{AB}$、$\overline{AD}$ 爲直徑作半圓，試求兩半圓圍成區域的面積= ⑨⑩⑪π − ⑫⑬⑭$\sqrt{3}$ 。



E. 設 $S=1+1\times2+1\times2\times3+\dots\dots+1\times2\times3\times\dots\times100$，則 S 的個位數字爲 ⑮ 。

F. 如下圖，一張長 10 公分，寬 6 公分的矩形紙張。創創隨手將一長邊 $\overline{CD}$ 摺起，使 C 點落在對邊 $\overline{AB}$ 上之 C' 點。則摺痕 $\overline{DE}$ 之長爲 $\dfrac{\sqrt{⑯⑰⑱⑲}}{3}$ 公分。



G. 每一本現代的書都有國際標準書碼(即 ISBN 碼)，共有十碼，前九碼是九個數字，稱爲「訊息碼」；第十碼可能是數字或是 × 這個記號，稱爲「檢查碼」。檢查碼是由訊息碼所決定的，若訊息碼爲 $a_1\,a_2\,a_3-a_4\,a_5\,a_6-a_7\,a_8\,a_9$，則根據加權數

$$1\cdot a_1+2\cdot a_2+3\cdot a_3+\ldots\ldots+9\cdot a_9$$

除以 11 所得的餘數作爲檢查碼，當餘數是 10 時，規定檢查碼爲 × 。

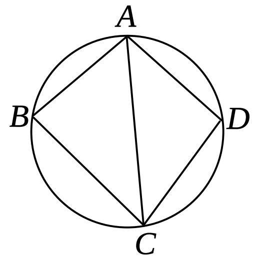
柯南從博客來書店網站上查得「自然哲學之數學原理」這本書的 ISBN 碼，並用噴墨印表機印出。不小心摸到其中的第五碼，使得該數字模糊了，書碼如下：

ISBN：986－7■9－103－4

則第五碼的數字是 __20__ 。

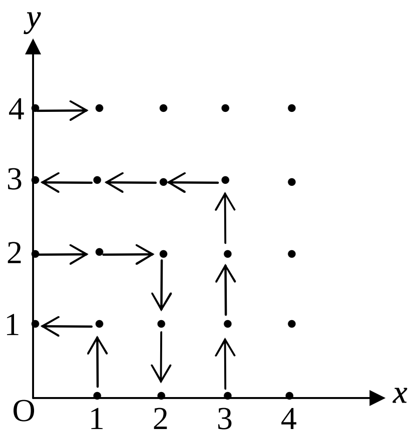
H. 如圖，圓內接四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}=\overline{AD}$，$\angle BCD=60°$，$\angle ADC=100°$，

則$\angle BAC$ 是 __21 22__ 度。



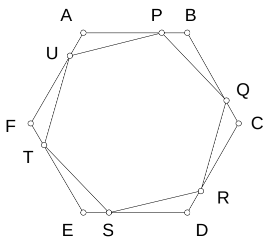
I. 在直角座標平面的第一象限中，把座標都是整數的點按以下方式編號：

（0，0） 點第 1 號
（1，0） 點第 2 號
（1，1） 點第 3 號
（0，1） 點第 4 號
（0，2） 點第 5 號
（1，2） 點第 6 號
（2，2） 點第 7 號
（2，1） 點第 8 號
（2，0） 點第 9 號



按圖中箭頭的順序，則第 2000 號的點座標爲 __（23 24 , 25 26）__ 。

J. 下圖爲邊長 4 公分的正六邊形 $ABCDEF$。在各邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DE}$ 、 $\overline{EF}$ 、 $\overline{FA}$ 上，從距離各頂點 A、B、C、D、E、F 的 3 公分處，取點 P、Q、R、S、T、U 連接起來，作成正六邊形，則此正六邊形 $PQRSTU$ 的面積爲原六角形 $ABCDEF$ 面積的 $\dfrac{\text{27 28}}{16}$ 倍。

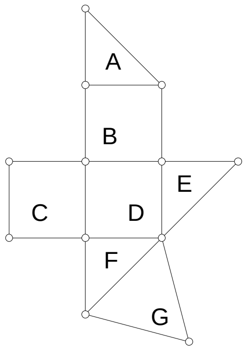


K. 武陵高中的學生人數今年比去年多了 10%，其中男學生增加 5%，女學生增加 20%。請問今年武陵高中的學生，女生所佔的比例爲 $\dfrac{4}{29\ 30}$ 。

L. 小明在方格紙上畫了一個直角坐標平面，並且標示出 $(0,3)$ 與 $(9,0)$ 兩點，因爲已經下課了，所以她將方格紙折疊一次，收進書包中。回家後她發現，由於之前的墨水未乾，所以點 $(0,3)$ 的墨汁印到 $(4,0)$ ，點 $(9,0)$ 的墨汁印到 (x,y) 。請問 $x+y=$ 31 . 32 。

M. 如下圖，A、E 與 F 爲等腰直角三角形，B、C、D 爲正方形，其邊長爲 1，G 爲正三角形，若知此圖爲某一多面體的展開圖，則此多面體之體積爲 $\dfrac{33}{34}$ 。

(錐體的體積=$\dfrac{1}{3}$×底面積×高)



N. 如下圖，圖 0、1、2、3 分別包含了 1、5、13、25 個小正方形，若依此規則排列下去，則在圖 50 中有 35 36 37 38 個小正方形。

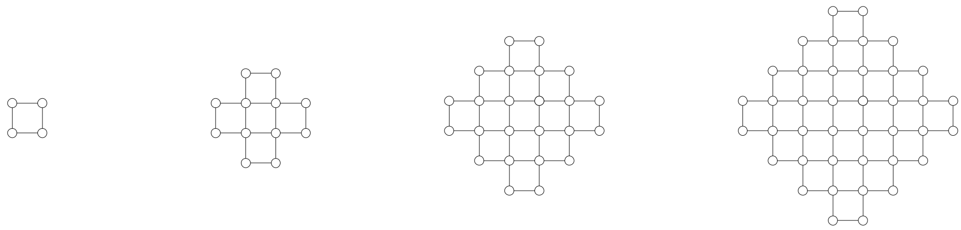
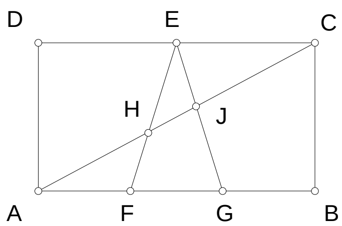


圖 0　　圖 1　　圖 2　　圖 3

O. 矩形 $ABCD$ 中，點 F 與 G 在 $\overline{AB}$ 上使得 $\overline{AF}=\overline{FG}=\overline{GB}$ 且 E 是 $\overline{DC}$ 的中點，又 $\overline{AC}$ 交 $\overline{EF}$ 於 H 點且交 $\overline{EG}$ 於 J 點。若矩形 $ABCD$ 的面積是 70，則 ΔEHJ 的面積爲 39 。



P. 設 P(n)表示正整數 n 的所有位數的數字乘積，S(n)表示正整數 n 的所有位數的數字和。例如：P(23)=6、S(23)=5。假定 N 爲二位數使得 N=P(N)+S(N)時，請問 N 的個位數字爲 40 。

A.大雄的家與靜香的家相距 15 公里。今天早上大雄先騎腳踏車朝靜香家去，過了一會兒靜香也騎腳踏車朝大雄家去。當他們在路上相遇時，大雄騎車的時間恰好爲靜香的兩倍，而大雄騎車的速率爲靜香的 $\frac{3}{4}$ 倍。則當他們相遇時，靜香已經騎了 5 公里。

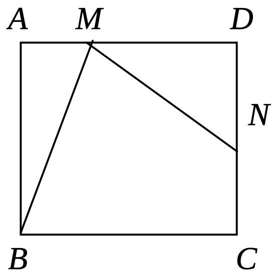
Ans：6

B.一個邊長爲 n 單位的正立方體，將它的六個面都用油漆塗成紅色，並將它切割成 n^3 個大小相同的單位正立方體。若這些單位正立方體中，至少被油漆塗上兩個面的數量爲 80 個，則 $n =$ 6 。

Ans：8

C.如下圖所示，在邊長爲 1 的正方形 $ABCD$ 中，N 是 $\overline{DC}$ 的中點，M 是 $\overline{AD}$ 上異於 D 的點，且 $\angle NMB = \angle MBC$，則 $\overline{AM} = \dfrac{1}{7}$ 。

Ans：3



D.對於實數 x，符號 $[\,x\,]$ 表示不大於 x 的最大整數。例如：$[\,3.14\,] = 3$，$[-7.59] = -8$。則方程式 $[\frac{3x+7}{7}] = 4$ 中，x 爲整數的，共有 8 個。

Ans：3

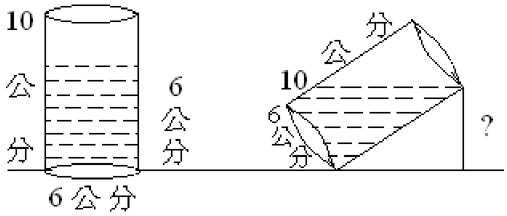
E.已知坐標平面上，設原點 $O, A(1,3)$, $B(-3x,x)$ ，且 $x>0$ ，若 ΔOAB 周長爲 $3\sqrt{10}$ ，則 $x=\dfrac{9}{10}$ 。**（請務必將答案化成最簡分數，再畫卡！）**

Ans：$\frac{3}{4}$

F.一個正整數如果從左讀到右與從右讀到左相同，則稱這個數爲迴文數。例如：1、88、747 及 2002。若將五位數中的所有迴文數由小到大排成一數列：10001，10101，……，則 78987 是這個數列中的第 11 12 13 項。

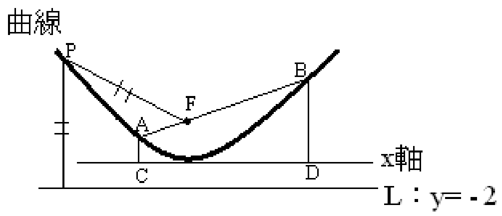
Ans：690

G.一個水平的桌上有一圓柱體的水杯，高 10 公分，口徑 6 公分(口徑就是底面的圓的直徑)，其中水深 6 公分，如左圖。一個小孩將其扳成傾斜，在水即將溢出時，如下圖，被媽媽及時制止。試問此時水面距桌面有多高？答案爲：＿⑭＿公分。



Ans：6

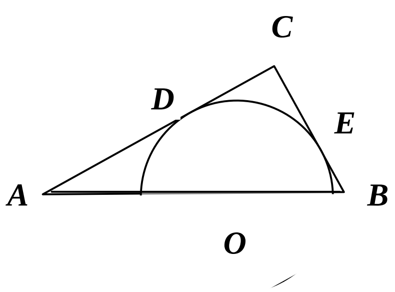
H.如下圖，曲線上任意一點 P 到點 F 的距離與到直線 $L: y=-2$ 的距離相等。A、B 爲曲線上的相異二點，已知 $\overline{AB}$ 通過點 F，且 $\overline{AB}=18$。若 C、D 分別爲 A、B 在 x 軸上的垂足，且 $\overline{CD}=12$。則四邊形 $ACDB$ 的面積爲＿⑮⑯＿。



Ans：84

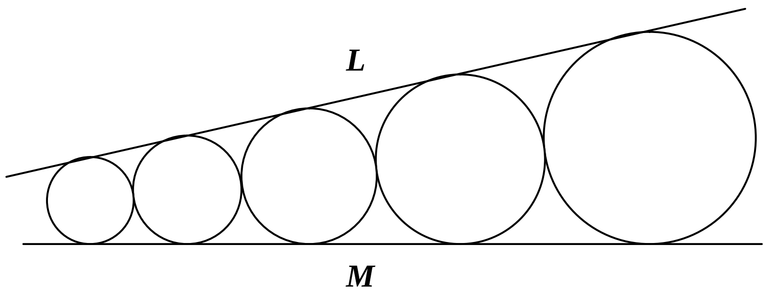
I.如下圖，半圓的圓心 $\boldsymbol{O}$ 在直角△$\boldsymbol{ABC}$ 的斜邊 $\overline{AB}$ 上，且與兩股相切。若直角△$\boldsymbol{ABC}$ 的面積爲 5，斜邊長爲 $\sqrt{29}$，則半圓的半徑爲 $\dfrac{⑰⑱}{7}$。

Ans：$\dfrac{10}{7}$



J.如下圖，5 個圓分別都與直線 $\boldsymbol{L}$，$\boldsymbol{M}$ 相切，且 5 個圓由小至大依序相切。若最大圓半徑是 18，最小圓半徑是 8，求最中間圓的半徑爲 ⑲⑳ 。

Ans:12



K.設 x、y 滿足關係式 $y=-x^2+20x-64$ 且 x、y 爲正整數，則數對 (x,y) 共有 ㉑㉒ 組解。

Ans:11

L.設 $f(x)$ 與 $g(x)$ 爲兩次數不相等且係數均爲正整數或零的多項式，且滿足

$[f(x)]^2-[g(x)]^2=x^4+3x^2-2x+3$，則 $f(x)=$ ㉓ x^2+ ㉔ $x+$ ㉕

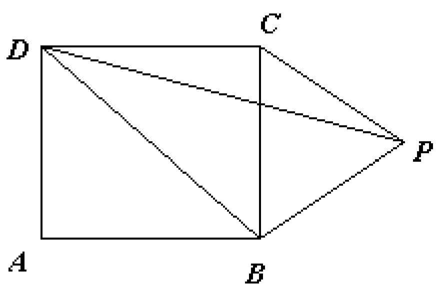
Ans: x^2+2

M.已知半徑分別爲 1 和 2 的兩圓外切於點 A，則點 A 到兩圓外公切線的(垂直)距離爲何？

答案爲：$\dfrac{㉖}{㉗}$

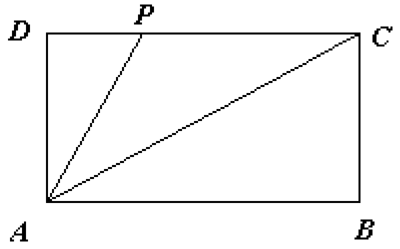
Ans: $\dfrac{4}{3}$

N.如下圖，四邊形 $ABCD$ 爲正方形。若 $\overline{AB}=8$、$\overline{PB}=\overline{PC}$，且 ΔPBD 之面積爲 48，則 ΔPBC 之面積爲 ㉘㉙ 。



Ans：32

O.如下圖，四邊形 $ABCD$ 爲長方形。若 P 是 $\overline{CD}$ 上一點且 $\frac{\overline{DP}}{\overline{PC}}=\frac{1}{2}$，又 ΔAPD 之面積爲 8，則梯形 $ABCP$ 之面積爲 ㉚㉛ 。



Ans：40

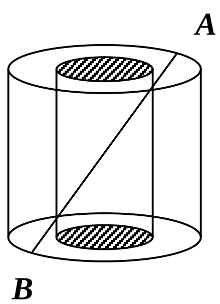
P.已知 n 爲整數且滿足 $(n^2-n-1)^{n+2}=1$，則此種 n 共有 ㉜ 個。
Ans：4

Q.一數列 $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_n,\ldots$各項均爲正整數，且 $a_1\le a_2\le a_3\le\ldots\le a_n\le\ldots$。若 $a_7=120$，$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}(n\ge 1)$，則 $a_8=$ ㉝㉞㉟ 。
Ans:194

R.一串數列 1，4，7，10，……，697，700 的規律是：第一個數是 1，以後的每一個數等於它前面的一個數加 3，直到 700 爲止。將所有這些數相乘，則所得之數的尾部，0 的個數共有 ㊱㊲ 個。（例如：數字 200307150000 的尾部，0 的個數有 4 個）
Ans: 60

S.有一個高 4 英呎的圓柱水塔且馬達抽水設備置於水塔中央的封閉小圓柱中，並可儲水於外側環狀空間，如下圖所示。工人清洗水塔內部時發現，長 6 英呎的竹竿 $\overline{AB}$ 恰與小圓柱相切且兩端點恰好抵住水塔上下底面的外緣，試問此水塔的容積爲 ㊳㊴ π 立方英呎。

Ans：20

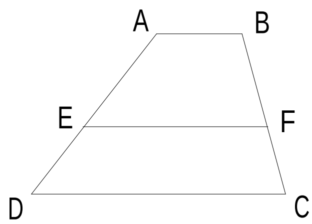


T.已知 $f(x)$滿足 $f(x)\,f(1-x)=1$，其中 $0\le x\le 1$，則

$$\frac{1}{1+[f(\frac{0}{99})]^2}+\frac{1}{1+[f(\frac{1}{99})]^2}+\frac{1}{1+[f(\frac{2}{99})]^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{1+[f(\frac{98}{99})]^2}+\frac{1}{1+[f(\frac{99}{99})]^2}=\underline{\text{(40)(41)}}$$ 。

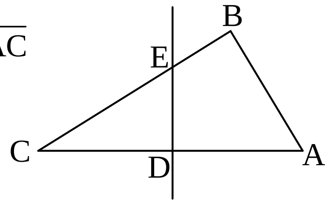
Ans：50

U.如下圖，梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$，且 $\overline{CD}=3\overline{AB}$，$\overline{EF}\,//\,\overline{CD}$，$\overline{EF}$ 將梯形 $ABCD$ 分成面積相等的兩部分，則 $\dfrac{\overline{AE}}{\overline{ED}}$ 之值爲 $\underline{\sqrt{(42)}+(43)}$



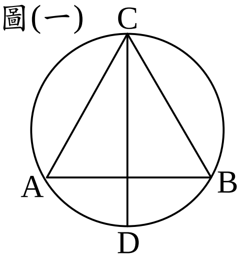
Ans: $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$

三、填充題



圖(一)

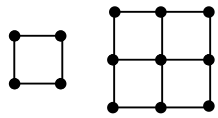
1. 如圖(一)，ΔABC 為一直角三角形，$\angle B=90^0$， $\overline{AC}$ 之中垂線與 $\overline{BC}$ 、$\overline{AC}$ 分別交於 E、D 兩點，且 $\overline{AB}=4$， $\overline{CE}=5$，則 ΔABC 面積為__(1)___ 。



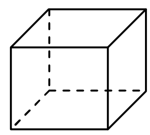
圖(二)

2. 如圖(二)，A、B、C、D 為圓上四點， $\overline{AB}=4$， $\overline{CD}$ 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分線，且 $\overline{CD}=5$，則 $\sin\angle ACB$=__(2)__ 。

3. 用 4 根火柴可以圍成一個正方格，用 12 根火柴可以圍成 2×2 正方格，按照這種方法，要圍成 10×10 的正方格，需要多少根火柴?__(3)___ 。



4. 設 $\langle a_n\rangle$ 為一等差數列，$a_1+a_2+\dots\dots+a_{100}=100$，且 $a_{101}+a_{102}+\dots\dots+a_{200}=200$，求 a_2-a_1=__(4)__ 。
5. 將一矩形的角剪去一個三角形後形成一個新的五邊形，今知此五邊形之邊長為 13、19、20、25、31(不一定照順序成五邊形)，試問此五邊形之面積為___(5)_____ 。
6. 設 f 表實數值函數，且對每一個 $x > 0$ 時，有 $f(x)+2f(\frac{2002}{x})=3x$，則 $f(2)$=__(6)_____ 。



(圖三)

7. 一正立方體有 8 個頂點(如圖三)，若其中有四個頂點兩兩的距離皆為 1，求此立方體的體積=_(7)_ 。
8. 有一個大抽屜，裡面散放著 1 雙藍色、2 雙黑色、3 雙白色、4 雙紅色的襪子(不分左右)，在摸黑的情況下，至少應取幾隻襪子，方可保證有一雙同色的襪子可穿?__(8)__
9. 在遊樂場中，一半徑為 20 公尺的摩天輪垂直立於地面上，已知其每分鐘旋轉一圈，若某人從地面上(摩天輪的最低點)搭乘摩天輪，則過__(9)___秒後，其離地面的高度為 10 公尺。
10. 某公司為促銷瓶裝礦泉水，提出甲、乙、丙三個降價方案：甲案為買五送一，乙案為打八折，丙案為容量增加百分之二十而價格不變。則哪一個方案降價最多?__(10)___

11. 設 a、b、c 為兩兩互異的實數，且 $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$，求 $x+y+z=$？

答案：0

12. 設 $\frac{x+2y}{3}=\frac{x+4y}{4}=\frac{x+6y}{z}$，求 $z=$？

答案：5

13. 設 $0<a<b$，且 $ab=1$，化簡 $\frac{\sqrt{(a-b)^2+4}-\sqrt{(a+b)^2-4}}{\sqrt{(a-b)^2+4}+\sqrt{(a+b)^2-4}}=$？

答案：a^2

14. 規定一種新運算如下： $a※b=\frac{a+b}{2}$，例如：$4※6=\frac{4+6}{2}=5$

若 $a※(3※7)=6$，求 $a=$？

答案：7

15. 梯形 $ABCD$ 中，$\overline{AD}//\overline{BC}$，且 $\overline{AD}+\overline{BC}=3$，$\overline{AC}=\sqrt{3}$，$\overline{BD}=\sqrt{6}$

，求梯形 $ABCD$ 的面積？

答案：$\frac{3}{2}\sqrt{2}$

16. 設等腰三角形的三邊長均爲正整數，且周長爲 15，
試問：滿足上述條件的三角形共有_____個（全等三角形算同一個）

答案：4

（註）（4，4，7）、（5，5，5）、（6，6，3）、（7，7，1）

17. 有一等腰但非等邊的銳角三角形，它的三內角平分線、三邊的中線、三邊的高，共計有_____條(重疊的線算一條)

答案：7

18. 已知 $(x-1)^8=ax^8+bx^7+cx^6+dx^5+e\,x^4+fx^3+gx^2+hx+i$，其中 a、b、c、d、e、f 、g、h、i 均爲實數，求 $b+c+d+e+f\ +g+h=$？

答案：-2

19. 化簡$(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)=$？

答案：$\frac{1}{2}(3^{32}-1)$

20. 一個正常的時鐘，它的分針和時針會在五點____分重疊

答案：$21\frac{9}{11}$

21. 設 $f(x)$表一函數，且對任意的正實數 x 皆滿足 $f(x)+4f(\frac{100}{x})=x$，求 $f(4)=$？

答案：$\frac{96}{15}$

22. <u>武陵高中</u>有一台神奇的兌弊機(每次只能投入一枚硬幣)，當我們放入一枚 10 元硬幣時，會得到二枚 5 元硬幣，而放入一枚 5 元硬幣時，會得到五枚 1 元硬幣，但放入一枚 1 元硬幣時，卻會得到二枚 10 元硬幣。若一開始你只有一枚 1 元硬幣，則使用此機器後，你可能擁有多少錢？
（A）44（B）66（C）59（D）95（E）115 元

答案：（E）

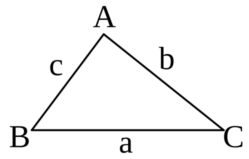
23. <u>阿貴</u>想從一家供應四種冰淇淋(鳳梨、巧克力、草莓、以及酸梅，且每一種不只二份)的商店中購買二份冰淇淋，試問共有____種不同的選購方法。
(A) 4　(B)6　(C)9　(D)10　(E)16

答案：（D）

四、計算證明題

1. 甲、乙、丙三人在 2000 公尺的賽跑中，當甲跑到終點時，乙尚差 800 公尺，丙尚差 400 公尺；假設三人皆以等速度前進，則丙到達終點時，乙尚差多少公尺?

2. 在ΔABC中，已知$\angle B=2\angle C$，$\overline{BC}=a$，$\overline{CA}=b$，$\overline{AB}=c$，如圖所示。試證：$b^2=c(a+c)$



3. 小明想從一家供應三種口味甜甜圈(原味的、巧克力的以及粉糖的)的商店中購買四個甜甜圈(可選同一種)，試問共有______種不同的選購方法。

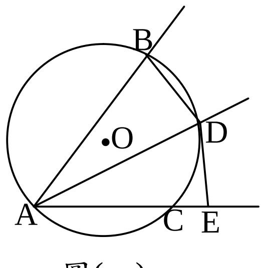
4. 右圖所示，10 個數字排成一列，若任一相鄰的三個數字相加的和皆爲 199，求 x=?
(空白處是暫時蓋著的意思)

	11				x				72

5. 已知：如圖(一)，過$\angle BAC$的頂點 A 作圓 O，圓 O 交$\angle BAC$的兩邊於 B、C，圓 O 交該角的平分線於點 D；$\overline{DE}$切圓 O 於點 D，交$\overrightarrow{AC}$於點 E，

求證：(1) $\overline{BD}^2=\overline{AB}\times\overline{CE}$

(2)若$\overline{BD}=3\sqrt{2}$，$\overline{DE}+\overline{CE}=12$，$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\dfrac{3}{2}$，求$\overline{DE}$的長。



圖(一)

6. (1)解方程式：$\sqrt{\dfrac{x-3}{x+1}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{x-3}}=\dfrac{5}{2}$

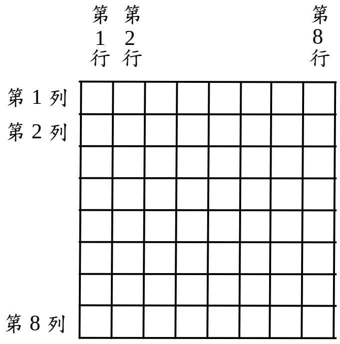
(2)解方程組：$\begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2x^2-3xy-2y^2=0 \end{cases}$

7. 設有 8×8 的正方形方格棋盤，將 12 個棋子任意放入不同的 12 個方格中，試回答下列問題：

(1)設 8 行上每行的棋子數從小到大分別爲 $a_1, a_2, \dots, a_8$，且 $0\le a_1\le a_2\le\dots\le a_8$，

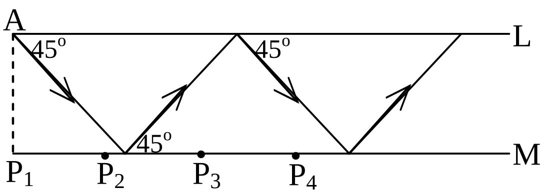
試證：$a_5+a_6+a_7+a_8\ge 8$

(2)利用(1)之結論，試證：不管棋子怎麼放，都可以選出某 4 行 4 列，使得這 12 枚棋子都在這 4 行 4 列所包含的方格中。

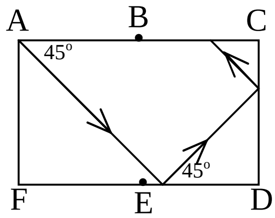


8. (1)如圖(二)：L 和 M 爲兩條距離 150cm 的平行線，點 A 在直線 L 上，點 P_1、P_2、P_3、….在直線 M 上且 $\overline{AP_1}\perp L$，$\overline{P_1P_2}=\overline{P_2P_3}=\overline{P_3P_4}=\dots=\overline{P_nP_{n+1}}=\dots=130$ cm，今從 A 點與 L 夾角 45^o 的方向射出一線，碰到直線 M 後仍以與直線 M 夾角 45^o 的方向反射，如此不斷反射下去，且反射線皆與 L 或 M 夾角 45^o，試問：反射線最先碰到直線 M 上 P_1、P_2、P_3、…當中的哪一點?

(2)在長 260cm，寬 150cm 的撞球台上，有 A、B、C、D、E、F 六個球袋，其中 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{DE}=\overline{EF}=130$ cm，現在從 A 處沿與 $\overline{AC}$ 夾角 45^o 的方向打出一球(如圖(三))，碰到桌邊後又沿 45^o 方向彈出，如此繼續下去，假如球可以一直運動，直到落入某個球袋中爲止，那麼它將落入哪個球袋中?



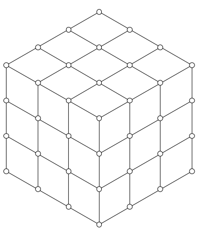
圖(二)

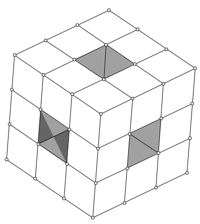


圖(三)

9. (1)圖(四)是由 27 個邊長爲 3 公分的小正立方體（3×3×3）所拼成的大正立方體（9×9×9），現在將大正立方體各表面正中央及內部正中央等 7 個小正立方體移除，則剩餘的 20 個小正立方體(如圖(五))之**表面積**爲多少？

(2)若再將剩餘的 20 個小正立方體，依同樣步驟移去正中央及內部正中央等 7 個 1×1×1 的小正立方體，則最後形狀的**表面積**爲多少？


圖(四)

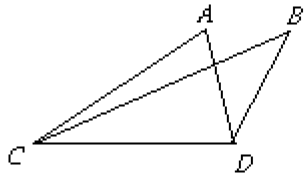

圖(五)

10. 設 a、b、c 爲兩兩互異的實數，且 $a+\frac{1}{b}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$

試證明：$a^2b^2c^2=1$

11. 設△ACD、△BCD 共用底邊 $\overline{CD}$，若∠A=∠B(如右圖)

試證明：A、B、C、D 四點共圓



12. 設 x 爲一實數

（1） 試證明：$\frac{4}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{2x+3}}=\sqrt{2x+7}+\sqrt{2x+3}$

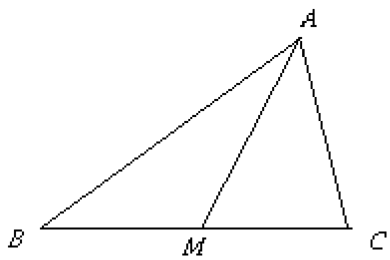
（2） 利用（1）的概念解下列方程式：

$$\sqrt{2x+7}+\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+5}+\sqrt{3x+1}$$

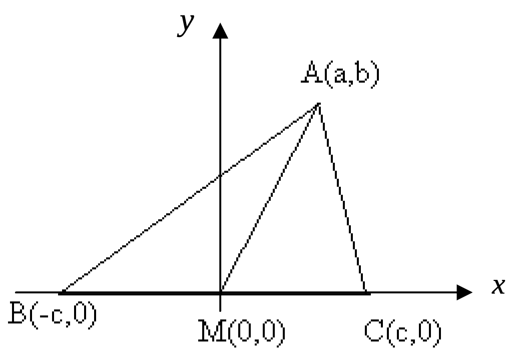
答案：$x=2$

13. （1）△ABC 中，M 爲 $\overline{BC}$ 邊上之中點，

試證明：$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=2\overline{AM}^2+\frac{1}{2}\overline{BC}^2$



（提示）建立如下的座標系：令 $A(a，b)$、$B(-c，0)$、$C(c，0)$、$M(0，0)$



（2）考慮一四邊形 $ABCD$，設 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ 之中點分別爲 M, N，

試證明：$\overline{AB}^2+\overline{BC}^2+\overline{CD}^2+\overline{DA}^2=\overline{AC}^2+\overline{BD}^2+4\overline{MN}^2$

（利用：（1）的結論）

14. 解下列方程式：$\frac{1}{x^2+11x-8}+\frac{1}{x^2+2x-8}+\frac{1}{x^2-13x-8}=0$

（提示）令 $y=x^2-8$

答案：$x=-1，1，-8，8$

15. 任取七個不同的整數，試說明：這七個整數中必定存在兩個整數，使得這兩整數的和或差是 10 的倍數。

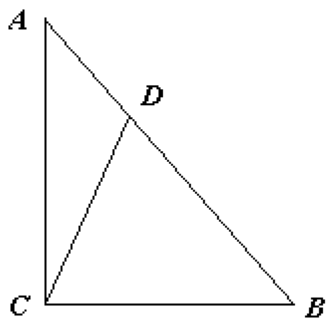
16.（1）由 1，2，3，4，5，6，7，9 等八個數字組成 4 個二位數的質數
（如 23，41，67，59），且每個數字恰只能用一次。
試列出所有可能之組合？(共五種可能)
註：23，41，67，59 與 23，67，59，41 與 67，23，41，59 ……視為同一種組合。
（2）警察審問了有偷東西嫌疑的甲、乙、丙、丁四人。
甲說：「我看見東西是乙偷的」;
乙說：「不是我！東西是丙偷的」;
丙說：「乙在撒謊，他在陷害我」;
丁說：「我不知道東西是誰偷的，反正我沒偷」。
已知這四人當中，恰有一人的供詞是真話(其餘三人的供詞都是假話)
而且只有一人是小偷。請問這四人當中，誰是小偷？誰的供詞是真話？

17.設 a、b、c 均為正整數，且滿足

$$\begin{cases} a+b+c=93 \\ \frac{4}{5}a+\frac{5}{6}b+\frac{6}{7}c=79 \end{cases},$$

（1）證明：a 是 5 的倍數，b 是 6 的倍數，c 是 7 的倍數。
（2）求 a、b、c 之值。

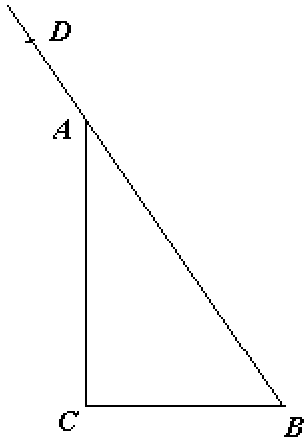
18. 已知ΔABC 為直角三角形，且 $\angle ACB=90°$



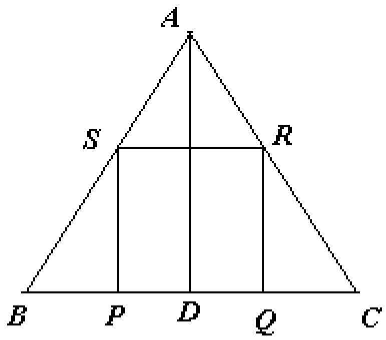
（1）如右圖所示，點 D 在斜邊 $\overline{AB}$ 上，但 D 不含端點
(即：D 不與 A 重合，且 D 不與 B 重合)。

試證明：$\dfrac{\overline{CD}^2-\overline{BD}^2}{\overline{BC}^2}=\dfrac{\overline{AD}-\overline{BD}}{\overline{AB}}$

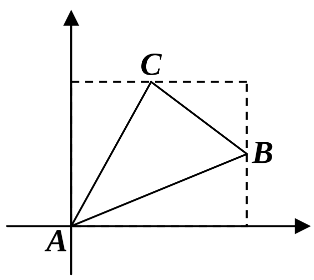
（2）當 D 在斜邊 BA 之延長線上時(如右下圖所示)，
（1）中的等式是否成立？請說明理由。



19.如下圖，$\overline{AD} \perp \overline{BC}$，四邊形 $PQRS$ 為正方形。已知 $\overline{BC}$ 為二位正整數，其十位數字為 a，個位數字為 b，即：$\overline{BC} = 10a + b$。若 $\overline{SR} = c$，$\overline{AD} = d$ 且 a、b、c、d 是由小到大的 4 個連續正整數，求 ΔABC 之面積？



20. (1)如下圖，ΔABC 中：$A(0\ ,\ 0)$,$B(x_1\ ,\ y_1)$,$C(x_2\ ,\ y_2)$，且 x_1、x_2、y_1、y_2 皆為整數，試證明：ΔABC 的面積為某整數之半.



(2)證明：在直角座標系中，不存在頂點皆為整數點的正三角形.(可利用(1)來證明)
(x、y 座標皆為整數的點，稱為整數點)

21. 若 a,b,c 為整數且 $|a-b|+|c-a|=1$，試求：$|a-c|+|a-b|+|b-c|$ ＝？

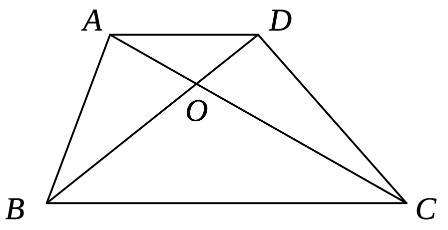
ANS：2

22. 想在某個國家的大城市中建立航空網，其規則如下：
(1) 任何一個大城市都與不多於三個大城市有直達航班。
(2) 從任一個大城市到另一個大城市可找到一條直達或轉機一次的路徑。
試問：這個國家最多可能有幾個大城市？就你的答案畫出相應的航空網，並說明之。

23. 將質數由小到大排列，兩連續質數的平方差為 672，試求此兩質數？

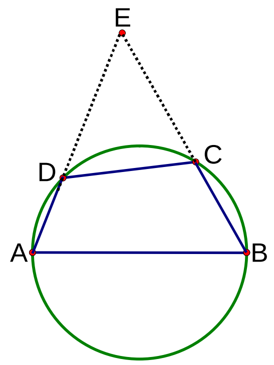
ANS：53,59

24. 梯形 $ABCD$，其中對角線 $\overline{AC}$ 、 $\overline{BD}$ 交於 O 點，如下圖所示。已知△OAB 的面積爲 $\mathbf{S_1}$，△OBC 的面積爲 $\mathbf{S_2}$，△OCD 的面積爲 $\mathbf{S_3}$，△ODA 的面積爲 $\mathbf{S_4}$。試證明：$\mathbf{S_1} \times \mathbf{S_3} = \mathbf{S_2} \times \mathbf{S_4}$。



25. 已知 $ABCD$ 爲圓內接四邊形，其中 $\overline{AB}$ 爲直徑，現延長直線 AD 與直線 BC 交於圓外一點 E（如下圖），已知△ABE 的面積爲△CDE 面積的 $\dfrac{25}{9}$ 倍，且 $\overline{DE}=6$，求 $\overline{BD}$ 長。

Ans：8



26. 設 $p\,, q\,, pq+1$ 均爲質數且 $q-p>40$，
試求：(1) p 之值。
(2) q 之最小值爲何？

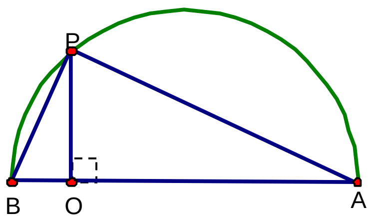
ANS：(1) 2 (2) 53

27. 已知鑽石分成 A、B、C 三種等級，現今珠寶店老闆金喜喜夫人進了一批鑽石共 25 顆，並一顆一顆依鑽石的等級評分，其評分方式如下：A 級鑽石給 4 分，B 級鑽石給 1.5 分，C 級鑽石給 0 分。在總分 0 分至 100 分之間有些分數只能用唯一方式獲得，例如：總分 96 分只能由 A 級鑽石有 24 顆，C 級鑽石有 1 顆這種情形獲得。而有些分數則恰有二種方式可獲得，例如：總分 22.5 分表示獲得方式只有以下兩種：(1) A 級鑽石有 3 顆，B 級鑽石有 7 顆，C 級鑽石有 15 顆，(2) A 級鑽石有 0 顆，B 級鑽石有 15 顆，C 級鑽石有 10 顆。已知此批鑽石的總分恰可用四種方式獲得，則其總分共有幾種可能？

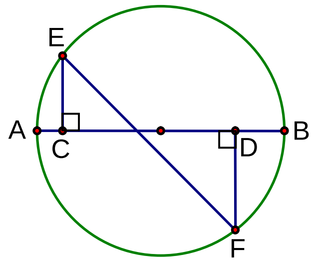
Ans：3 個

28. (1)設 O 爲線段 $\overline{AB}$ 上一點且 O 不爲 A 點與 B 點，現以 $\overline{AB}$ 爲直徑作一半圓並過 O 點作 $\overline{OP}\perp\overline{AB}$ 交半圓於 P 點，試證明：$\overline{OP}^2=\overline{OA}\times\overline{OB}$。(見下圖一)

(2)設 $\overline{AB}=20$，並以 $\overline{AB}$ 爲直徑作一圓 O，設 E 與 F 爲圓 O 上兩點且 E、F 位於 $\overline{AB}$ 異側，過 E 作 $\overline{AB}$ 的垂直線交 $\overline{AB}$ 於 C 點，過 F 作 $\overline{AB}$ 的垂直線交 $\overline{AB}$ 於 D 點，已知 $\overline{AC}=2$，$\overline{AD}=16$，求 $\overline{EF}$ 線段長。(見下圖二)



(圖一)



(圖二)

Ans：$14\sqrt{2}$

29. 是否存在兩數 b 和 c，使得兩方程式 $x^2+bx+c=0$ 與 $2x^2+(b+1)x+(c+1)=0$ 分別都有兩個整數根？若存在，請舉例；若不存在，請證明。

30. 設 m，n 爲正整數，$k=|12^m-5^n|$，

(1) 試證 k 不可能爲 5。

(2) 求 k 的最小值。