臺北區 105 學年度第一學期

第二次學科能力測驗模擬考試

數學考科參考答案暨詳解

數學考科詳解

題號	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
答案	(3)	(2)	(3)	(3)	(4)	(3)(4)	(1)(2)(4)(5)	(1)(2)(3)(4)(5)	(1)(3)(4)(5)
題號	10.	11.	12.	13.					
答案	(1)(2)(3)(4)(5)	(2)(3)(4)(5)	(1)(2)(4)	(1)(5)					

第壹部分：選擇題

一、單選題

1. (3)

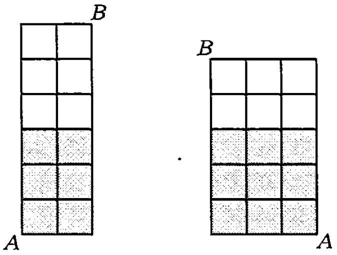
難易度：難

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：能運用空間圖形與棋盤街道走法及乘法加法原理

解析：將相鄰平面攤平分成兩類情況(未考慮下、後的狀況)

① 前＋上　　　② 左＋上



可知捷徑由 8 小段正方形邊長組成

所求為 $\underbrace{\frac{8!}{2!\,6!}}_{①}+\underbrace{\frac{8!}{3!\,5!}}_{②}-1\times\underbrace{\frac{5!}{3!\,2!}}_{①、②重複走的路線}=28+56-10=74$(種)

故選(3)。

2. (2)

難易度：中

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：空間向量內積之柯西不等式或迴歸直線之配方法

解析：〈解法一〉

由柯西不等式可得

$((x-1)^2+(y+1)^2+(x-2y+1)^2)((-1)^2+2^2+1^2)\geq((-1)(x-1)+2(y+1)+(x-2y+1))^2=16$

$\Rightarrow f(x,y)=(x-1)^2+(y+1)^2+(x-2y+1)^2\geq\frac{8}{3}$

$x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{3}$ 時等號成立

故選(2)。

〈解法二〉

由配方法可得

$$(x-1)^2+(y+1)^2+(x-2y+1)^2=2x^2-4xy+5y^2-2y+3$$
$$=2(x-y)^2+3\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{3}$$

當 $x-y=0$ 且 $y-\frac{1}{3}=0$ 時有最小值 $\frac{8}{3}$

此時 $x=\frac{1}{3}$，$y=\frac{1}{3}$

故選(2)。

3. (3)

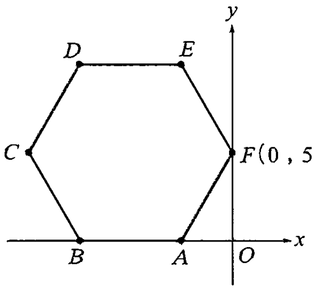
難易度：易

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

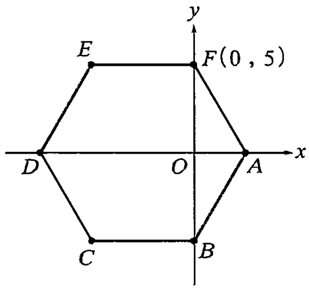
目標：利用向量做圖形討論

解析：(1) 若 A、B 皆在 x 軸上，則 $A\left(\frac{-5}{\sqrt{3}}, 0\right)$，如圖(一)

(2) 若 A 在 x 軸上，B 在 y 軸上，則 $A\left(\frac{5}{\sqrt{3}}, 0\right)$，如圖(二)



圖(一)



圖(二)

$\therefore \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{AO} = (\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OF}) \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{AO} = |\overrightarrow{AO}|^2 = \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{25}{3}$

故選(3)。

4. (3)

難易度：易

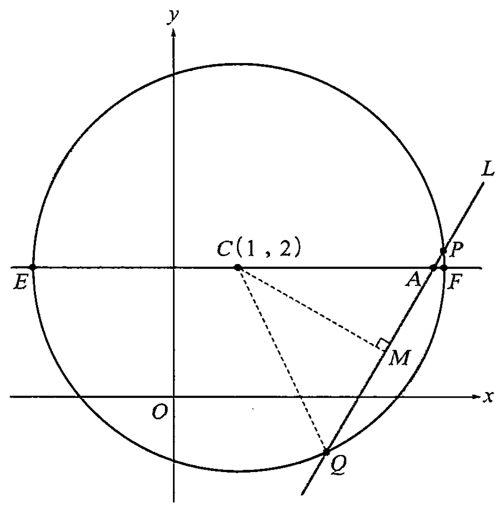
出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：了解圓與直線關係

解析：〈解法一〉

$(x-1)^2+(y-2)^2=10 \Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=(\sqrt{10})^2$

作圖如右



由三角形內冪性質可知

$\overline{AP} \times \overline{AQ} = \overline{AE} \times \overline{AF}$

$= (\sqrt{10}+3)(\sqrt{10}-3) = 10-9 = 1$

故選(3)。

〈解法二〉

作 $\overline{CM} \perp \overline{PQ}$

$\triangle ACM$ 中，$\overline{AC} = 3 \Rightarrow \overline{AM} = \frac{3}{2}$，$\overline{CM} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

$\triangle CMQ$ 中，$\overline{MQ} = \sqrt{(\sqrt{10})^2 - \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}$

$\therefore \overline{AP} \times \overline{AQ} = \left(\frac{\sqrt{13}}{2} - \frac{3}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{13}}{2} + \frac{3}{2}\right) = 1$

故選(3)。

5. (4)

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：反矩陣與矩陣的運算

解析：$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = 2\begin{bmatrix} -a & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

$A - A^{-1} = \begin{bmatrix} a-(-2a) & b-(-2b) \\ c-(-2c) & -a-2a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a & 3b \\ 3c & -3a \end{bmatrix} \Rightarrow \det(A-A^{-1}) = 3 \times 3 \times \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$

故選(4)。

二、多選題

6. (3)(4)

難易度：中

出處：第一冊第二章〈多項式函數〉

目標：熟練多項式函數圖形、方程式、不等式

解析：(1) ╳：實係數多項式方程式虛根成對定理，$f(i+1)=0 \Rightarrow f(-i+1)=0$

(2) ╳：$f(a+bi)=2$

$\therefore f(a-bi)=f(\overline{a+bi})=\overline{f(a+bi)}=\overline{2}=2$

(3) ○：$f(x)<0$ 的解為 $-2<x<3$，則 $f(x)>0$ 的解為 $x<-2$ 或 $x>3$

$\Rightarrow f(2x)>0$ 的解為 $2x<-2$ 或 $2x>3 \Rightarrow x<-1$ 或 $x>\dfrac{3}{2}$

(4) ○：$f(x)<0$ 的解為 $-2<x<3 \Rightarrow f(x)=0$ 的兩根為 -2 和 3，即 $f(x)$ 與 x 軸交於相異兩點

(5) ╳：$y=(x+2)f(x)$ 的圖形與 x 軸相交於兩點，其中 -2 為重根

故選(3)(4)。

7. (1)(2)(4)(5)

難易度：中

出處：第一冊第三章〈指數、對數函數〉、第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：善用指對數定義、運算及首數尾數，二項式定理

解析：$\log_3 a=20$，$\log_3 b=16 \Rightarrow a=3^{20}$，$b=3^{16}$

(1) ○：$a+b=3^{16}(3^4+1)=3^{16}(81+1)=3^{16}\times 2\times 41$

(2) ○：$a=b\times 3^4=b\times 81$， 因此 a 與 b 個位數字相同

(3) ╳：$\log(a+b)\approx \log a=20\log 3\approx 20\times 0.4771=9.542 \Rightarrow$ 故 $a+b$ 為 10 位數

(4) ○：$a=3^{20}=9^{10}=(10-1)^{10}$，末兩位 $C_9^{10}\,10(-1)^9+C_{10}^{10}(-1)^{10}=-99 \Rightarrow$ 末兩位為 -99 即末兩位為 01

$b=3^{16}=9^8=(10-1)^8$，末兩位 $C_7^8\,10(-1)^7+C_8^8(-1)^8=-79 \Rightarrow$ 末兩位為 -79 即末兩位為 21

因此 $a+b$ 末兩位數字為 $1+21=22$

(5) ○：$\log_3(a^4+b^5)=\log_3(2\times 3^{80})=80+\log_3 2$

$\log_3 162=\log_3(2\times 3^4)=4+\log_3 2$

$\log_3(a^4+b^5)-\log_3 162=76$

故 $\log_3(a^4+b^5)$ 與 $\log_3 162$ 之小數部分相等

故選(1)(2)(4)(5)。

8. (1)(2)(3)(4)(5)

難易度：中

出處：第二冊第三章〈機率〉

目標：善用機率與條件機率的運算

解析：(1) ○：$\dfrac{1}{P_4^5}=\dfrac{1}{120}$

(2) ○：$1-\dfrac{1}{120}\cdot 3=\dfrac{39}{40}$

(3) ○：「$1A3B$」已有四個號碼，但僅有 1 個在正確位置，其餘 3 個皆在不正確位置

$\dfrac{C_1^4(1\cdot 3!-3\cdot 2!+3\cdot 1!-0!)}{120}=\dfrac{1}{15}$

(4) ○：$P(4A0B|1A3B)=\dfrac{P(4A0B\cap 1A3B)}{P(1A3B)}$

$=\dfrac{1}{C_1^4(1\cdot 3!-3\cdot 2!+3\cdot 1!-0!)}=\dfrac{1}{8}$

(5) ○：$P(1A3B\cap 4A0B)=P(1A3B)\cdot P(4A0B|1A3B)$

$=\dfrac{1}{15}\times\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{120}$

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

9. (1)(3)(4)(5)

難易度：易

出處：第二冊第四章〈數據分析〉

目標：數據分析中資料平移伸縮對統計量之影響

解析：(1)○：$P=-2X+1\Rightarrow\mu_p=-2\mu_x+1$

(2)╳：$P=-2X+1\Rightarrow\sigma_p=2\sigma_x$

(3)○：$r_{(p,q)}=r_{(-2x+1,y-3)}=-r_{(x,y)}$

(4)○：Y對X的迴歸直線過點(μ_x,μ_y)，即Q對P迴歸直線過點$(-2\mu_x+1,\mu_y-3)$

(5)○：迴歸直線的斜率為 $\dfrac{r_{pq}\sigma_q}{\sigma_p}=\dfrac{-r_{xy}\sigma_y}{2\sigma_x}=\dfrac{1}{-2}\cdot\dfrac{r_{xy}\sigma_y}{\sigma_x}=\dfrac{1}{-2}b$

故選(1)(3)(4)(5)。

10. (1)(2)(3)(4)(5)

難易度：中

出處：第四冊第一章〈空間向量〉

目標：活用空間向量的內積與外積

解析：$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})\cdot\overrightarrow{c}=|\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}||\overrightarrow{c}|\cos\theta=|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\sin\varphi|\overrightarrow{c}|\cos\theta$

(其中 θ 為 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b}$ 與 $\overrightarrow{c}$ 之夾角，φ 為 $\overrightarrow{a}$ 與 $\overrightarrow{b}$ 之夾角)

$=3\times3\sqrt{5}\sin\varphi\times\sqrt{5}\times\cos\theta=45$

$\therefore\sin\varphi=\cos\theta=1\Rightarrow\varphi=90^\circ$，$\theta=0^\circ$

$\therefore\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{b}$ 且$(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{b})/\!/\overrightarrow{c}\Rightarrow\overrightarrow{a}\perp\overrightarrow{c}$ 且 $\overrightarrow{b}\perp\overrightarrow{c}\Rightarrow\overrightarrow{b}/\!/(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c})=(-2,-4,-5)$

$\therefore\dfrac{2}{-2}=\dfrac{m}{-4}=\dfrac{n}{-5}\Rightarrow m=4$，$n=5$

且 $\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c}=-\overrightarrow{b}$ $\quad\therefore(\overrightarrow{a}\times\overrightarrow{c})+\overrightarrow{b}=\overrightarrow{0}$

故選(1)(2)(3)(4)(5)。

11. (2)(3)(4)(5)

難易度：中

出處：第四冊第二章〈空間中的平面與直線〉

目標：能夠運用空間向量進行討論

解析：(1)╳：Γ為一條直線

(2)○：$\overrightarrow{AB}=(-1,1,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(-1,-1,-2)$

$\overrightarrow{V}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-4,0,2)/\!/(-2,0,1)$

令 $P(1,2,0)$

$\because\overline{PA}=\overline{PB}=\overline{PC}$

$$\therefore\Gamma=\begin{cases}x=1-2t\\ y=2\\ z=t\end{cases},\ t\in R$$

(3)○：$\sqrt{(1-2t)^2+2^2+t^2}=\sqrt{5t^2-4t+5}=\sqrt{5\left(t-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{21}{5}}$

當 $t=\dfrac{2}{5}$ 時，Γ中最接近原點的點為$\left(\dfrac{1}{5},2,\dfrac{2}{5}\right)$

(4)○：承(3)，Γ中與原點最接近的距離為 $\sqrt{\dfrac{21}{5}}$

(5)○：$\triangle ABC$的面積$=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+0^2+2^2}=\sqrt{5}$

故選(2)(3)(4)(5)。

12. (1)(2)(4)

難易度：易

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣運算的性質

解析：(1) ○

(2) ○：$\because \det(C)\neq 0 \Rightarrow C^{-1}$ 存在

$\therefore AC=BC \Rightarrow (AC)C^{-1}=(BC)C^{-1} \Rightarrow A(CC^{-1})=B(CC^{-1}) \Rightarrow AI=BI \Rightarrow A=B$

(3) ╳：反例：若 $A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$，$A^2=I$ 但 $A\neq I$ 且 $A\neq -I$

(4) ○

(5) ╳：$A_{2\times3}$，$B_{3\times2} \Rightarrow (AB)_{2\times2}$，若 $\det(AB)\neq 0 \Rightarrow (AB)^{-1}$ 存在，但 A^{-1} 及 B^{-1} 不一定存在

故選(1)(2)(4)。

13. (1)(5)

難易度：中

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：圓、拋物線與直線的關係

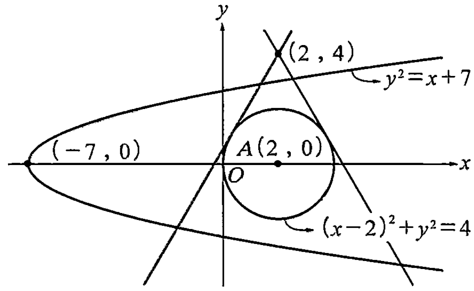
解析：$(x^2+y^2-4x)(y^2-x-7)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x=0$ 或 $y^2-x-7=0$

$\Rightarrow (x-2)^2+y^2=4$ 或 $y^2=x+7$

$L：y+4-2m=0$

$\Leftrightarrow y-4=m(x-2)$ 恆過 $(2,4)$ 且斜率為 m，作圖如右



$\because$ 相切　$\therefore d(A,L)=r=\dfrac{|2m-0+4-2m|}{\sqrt{m^2+1}}=2$　$\therefore m=\pm\sqrt{3}$

$\therefore m>\sqrt{3}$ 或 $m<-\sqrt{3}$ 時，有相異四個點

故選(1)(5)。

第貳部分：選填題

A. 45

難易度：易

出處：第二冊第二章〈排列、組合〉

目標：能利用重複組合及平方根的估計值

解析：$x_1+x_2+x_3+\cdots\cdots+x_n=2$

$\Rightarrow C_1^n+C_2^n=H_2^n=C_2^{n+2-1}=\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!\,2!}=\dfrac{(n+1)n}{2}>1000$

$\Rightarrow (n+1)n>2000$，連續正整數相乘大於 2000，$44<\sqrt{2000}<45$，故取最小值 $n=45$。

B. $(1,-1,-3)$

難易度：中

出處：第三冊第二章〈直線與圓〉

目標：能了解三線共點的意義並求出直線交點

解析：$\begin{cases}x+2y=a+2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①\\ 2x+3y=-a-4 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②\end{cases}$

②×2－①×3 得 $x=-5a-14$

①×2－②得 $y=3a+8$

代入 $L_3：3(-5a-14)+(-a+1)(3a+8)=-1$

$\Rightarrow 3a^2+20a+33=0 \Rightarrow (a+3)(3a+11)=0 \Rightarrow a=-3，-\dfrac{11}{3}$(不合)，$x=1$，$y=-1$

故序組 $(x,y,a)=(1,-1,-3)$。

C. $3\sqrt{3}$

難易度：中

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：邊角關係中之面積公式，餘弦及中線定理

解析：令 $\overline{AC}=y$

$\triangle ABC=\triangle ABD+\triangle ACD$

$\frac{1}{2}\times 6\times y\times\sin 120^\circ=\frac{1}{2}\times 6\times 4\times\sin 60^\circ+\frac{1}{2}\times 4\times y\times\sin 60^\circ\Rightarrow y=\overline{AC}=12$

$\overline{BC}^2=6^2+12^2-2\times 6\times 12\times\cos 120^\circ=252$

由中線定理

$\overline{AB}^2+\overline{AC}^2=(\overline{BM}^2+\overline{AM}^2)\times 2$

$\Rightarrow 6^2+12^2=\left(\frac{252}{4}+\overline{AM}^2\right)\times 2\Rightarrow\overline{AM}^2=27$

$\Rightarrow\overline{AM}=3\sqrt{3}$。

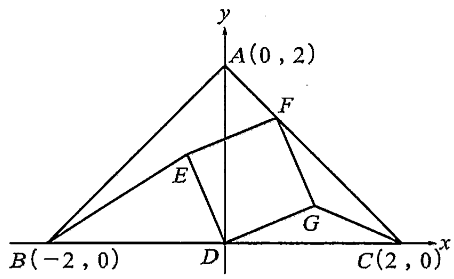
D. $4-2\sqrt{2}$

難易度：難

出處：第三冊第一章〈三角〉

目標：能夠進行坐標化與三角函數之和角倍角公式

解析：將圖形坐標化，令 $D(0,0)$，$A(0,2)$，$B(-2,0)$，$C(2,0)$，作圖如右



設 $G(r\cos\theta, r\sin\theta)$，$F(\sqrt{2}r\cos(\theta+45^\circ), \sqrt{2}r\sin(\theta+45^\circ))$，$E(-r\sin\theta, r\cos\theta)$，$r$ 為正方形 $DEFG$ 之邊長

因為 F 在 $\overline{AC}$ 上，F 符合 $x+y=2$ 代入

$2=\sqrt{2}r\cos(\theta+45^\circ)+\sqrt{2}r\sin(\theta+45^\circ)$

$=\sqrt{2}r(\cos\theta\cos 45^\circ-\sin\theta\sin 45^\circ+\sin\theta\cos 45^\circ+\cos\theta\sin 45^\circ)$

$=\sqrt{2}r\left(\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2r\cos\theta$

$\Rightarrow r=\frac{1}{\cos\theta}$ 即 $G(1,\tan\theta)$，$E(-\tan\theta, 1)$

$\because\sqrt{3}\,\overline{CG}=\overline{BE}$

$\therefore 3((1-2)^2+(\tan\theta)^2)=(-\tan\theta+2)^2+1^2$

$\Rightarrow 3+3\tan^2\theta=\tan^2\theta-4\tan\theta+5$

$\Rightarrow 4\tan\theta=2-2\tan^2\theta$

$\Rightarrow 2\tan\theta=1-\tan^2\theta\Rightarrow\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=1\Rightarrow\tan 2\theta=1\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{8}$

$r^2=\frac{1}{\cos^2\theta}=\frac{1}{\frac{1+\cos 2\theta}{2}}=\frac{2}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{4}{2+\sqrt{2}}=4-2\sqrt{2}$。

E. 4

難易度：易

出處：第三冊第三章〈平面向量〉

目標：能夠運用向量內積進行討論

解析：設 $P(a,b)\in C$，則 $a^2+b^2-a-b=0\Rightarrow a^2+b^2=a+b$，令 $Q(at,bt)$

又 $Q(at,bt)\in L\Rightarrow at+bt=4\Rightarrow t=\frac{4}{a+b}$

亦即 $Q\left(\frac{4a}{a+b},\frac{4b}{a+b}\right)$

$\therefore\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=(a,b)\cdot\left(\frac{4a}{a+b},\frac{4b}{a+b}\right)=\frac{4(a^2+b^2)}{a+b}=4$。

F. (13 , 11)

難易度：中

出處：第四冊第三章〈矩陣〉

目標：矩陣乘法

解析：令 $A=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_1&F_2\\F_2&F_3\end{bmatrix}$

$\Rightarrow A^3=A\cdot A^2=\begin{bmatrix}0&1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_1&F_2\\F_2&F_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_2&F_3\\F_3&F_4\end{bmatrix}$

$A^8=\begin{bmatrix}F_7&F_8\\F_8&F_9\end{bmatrix}\Rightarrow a+b=F_7+F_8=F_9$，$c+d=F_8+F_9=F_{10}$，$F_9+F_{10}=F_{11}\Rightarrow n=11$

1，1，2，3，5，8，13 $\Rightarrow a=F_7=13$

故數對 $(a , n)=(13 , 11)$。

G. $5+5\sqrt{13}$

難易度：易

出處：第四冊第四章〈二次曲線〉

目標：橢圓基本定義

解析：依題意作圖如右．

$10^2+(20\sqrt{3})^2=(10\sqrt{13})^2$

長軸長$=10+10\sqrt{13}$，所以噴水池到最南端$=\dfrac{10+10\sqrt{13}}{2}=5+5\sqrt{13}$。